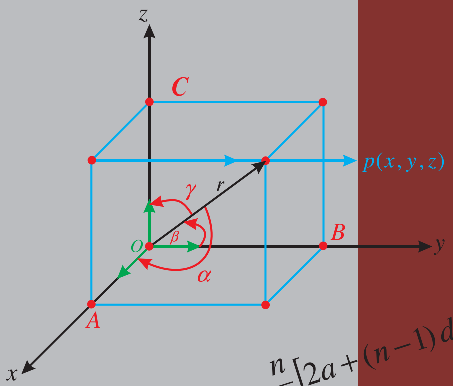
د پوهنې وزارت

د تعليمي نصاب د پراختيا، د ښوونکو د روزنې او د ساينس د مرکز معينيت

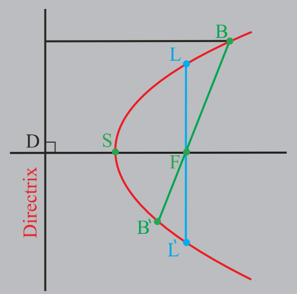
د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف لوی رياست

رياضي ۱۱

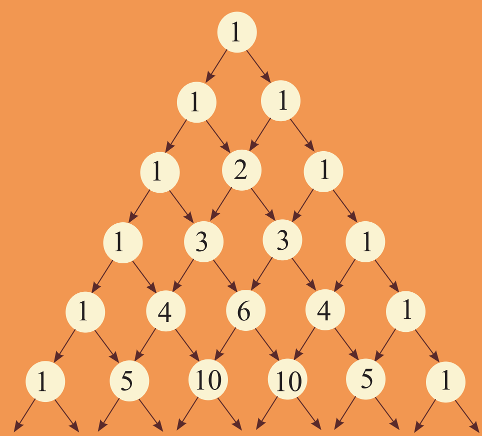
ټولګی



$$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$



رياضي ۱۱ ټولګی



د چاپ کال: ۱۳۹۰

د پوهنې وزارت
د تعليمي نصاب د پراختيا، د ښوونكو د روزنې او
د ساينس د مركز معينيت
د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي كتابونو د تاليف
لوی رياست

رياضي ۱۱ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۰ هـ. ش.

ليکوالان:

- پوهنمل طلاباز حبيب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- مهربه ناصر د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړې
- پوهندوی خالقداد فیروزکوهي د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- د مؤلف مرستیال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی

ژباړونکي:

- سرمؤلف نظام الدين د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی
- پوهنمل طلاباز حبيب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- د مؤلف مرستیال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی
- مختار نوید د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی

علمي او مسلکي ایډیټ:

- ډاکټر عطاء الله واحديار د پوهنې وزارت ستر سلاکار او د نشراتو رئيس.
- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.
- د مؤلف مرستیال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی

د ژبې ایډیټ:

- محمد قدوس ذکوخیل

دیني، سیاسي او کلتوري کمیټه:

- مولوي عبدالوکیل د اسلامي تعلیماتو علمي غړی.
- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.

د څارنې کمیټه:

- دکتور اسدالله محقق د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس مرکز معین
- دکتور شیر علي ظریفي د تعلیمي نصاب د پراختیا د پروژې مسؤول
- د سرمؤلف مرستیال عبدالظاهر گلستاني د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی رئیس

طرح او ډیزاین:

ولید «نوید» نسیمي

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې — هر بچی يې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، ګوجر دي — پاميريان، نورستانيان
براهوي دي، قزلباش دي — هم ايماق، هم پشه يان
دا هيواد به تل ځليږي — لکه لمر پر شنه آسمان
په سينه کې د آسيا به — لکه زړه وي جاويدان
نوم د حق مو دی رهبر — وايو الله اکبر وايو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزیر پیغام

ګرانو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختیا او پرمختګ بنسټ جوړوي. تعلیمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختګ او ټولنې د اړتیاوو له مخې رامنځته کېږي. ښکاره ده چې علمي پرمختګ او ټولنیزې اړتیاوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعلیمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښایي چې تعلیمي نصاب د سیاسي بدلونونو او د اشخاصو د نظریو او هیلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتیب شوی دی. علمي ګټورې موضوعګانې پکې زیاتې شوې دي. د زده کړې په بهیر کې د زده کوونکو فعال ساتل د تدریسي پلان برخه ګرځېدلې ده.

هیله من یم دا کتاب له لارښوونو او تعلیمي پلان سره سم د فعالې زده کړې د میتودونو د کارولو له لارې تدریس شي او د زده کوونکو میندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکیفیته ښوونه او روزنه کې پرله پسې ګډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هیلې ترسره شي او زده کوونکو او هېواد ته ښې بریاوې ور په برخه کړي.

پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ ګران ښوونکي د تعلیمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤولیت په ریښتوني توګه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زیار کاږي چې د پوهنې تعلیمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دین له بنسټونو، د وطن دوستی د پاک حس په ساتلو او علمي معیارونو سره سم د ټولنې د څرګندو اړتیاوو له مخې پراختیا وموميي.

په دې ډګر کې د هېواد له ټولو علمي شخصیتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له میندو او پلرونو څخه هیله لرم چې د خپلو نظریو او رغنده وړاندیزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تألیف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتیب کې یې مرسته کړې، له ملي او نړیوالو درنو مؤسسو، او نورو ملګرو هېوادونو څخه چې د نوي تعلیمي نصاب په چمتو کولو او تدوین او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې یې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفیق

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

لړلیک

دریم څپرکی فضايي هندسه

څلورم څپرکی ترادفونه

پنځم څپرکی لوګاريتم

شپږم څپرکی متریکسونه

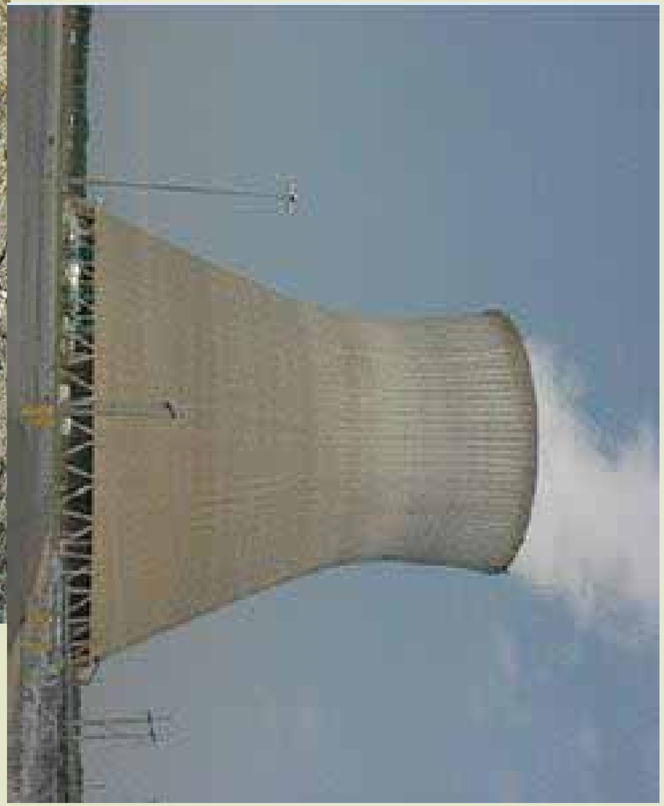
اووم څپرکی وکتورونه

اتم څپرکی احصایه

نهم څپرکی احتمالات

لومړی څپرکی

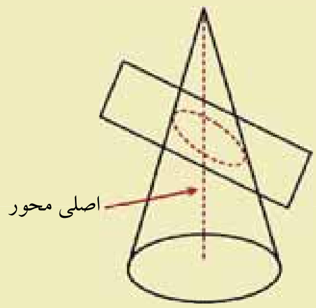
مخروطي مقاطع

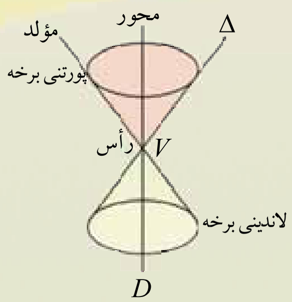
مخروطي مقاطع

sections of Conic

آیا ویلای شئ چې د یوې مستوي او مخروط د تقاطع له ګډ فصل څخه څه ډول منحنې ګانې په لاس راځي.



د مخروطي مقاطعو تعریف

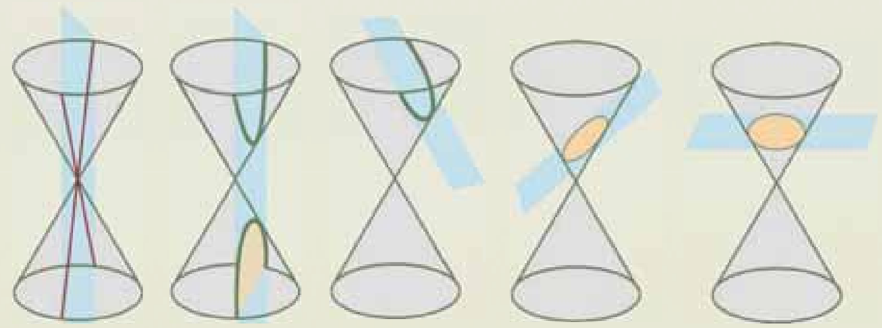


د Δ او D دوه مستقیم خطونه داسې په پام کې نیسو چې یو بل د V په ټکې کې قطع (پرې) کړي. که چیرې د D خط ثابت او د Δ خط د هغه په چاپیرو څرخیږي، له دې څرخولو څخه په فضاکې دوه شکلونه چې یو یې د V (ټکې) پورته او بل یې د V د ټکي کښته خواته جوړیږي. هر یو یې مخروط دی، لکه مخامخ شکل د D مستقیم خط د مخروط محور او د Δ مستقیم خط د هغه مولد دی. د یوې مستوي په واسطه د یوه مخروط قطع کول مختلف حالتونه لري چې مختلفې منحني ګانې منځ ته راځي چې مخروطي مقاطع بلل کیږي. په راتلونکې کې به هر یو په تفصیل سره ولوستل شي.

فعالیت

- یو مخروط د مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط په اصلي محور باندې عمود او یا له قاعدو سره موازي وي، ویلای شئ، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې د مستوي او مخروط له اصلي محور سره یې زاویه قایمه نه وي (نسبت اصلي محور ته مایل)، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط له مولد سره موازي وي، تقاطع یا ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- دوه مخروطه چې راسونه یې سر په سر (منطبق) او قاعدې یې موازي وي، د یوې متسوي په واسطه چې اصلي محور سره موازي وي قطع کړئ. ویلای شئ چې له ګډ فصل څخه یې څه ډول منحني په لاس راځي؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط اصلي محور په بر کې ولري، تقاطع یا ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:



پایله:

- که چېرې مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې مستوي د مخروط په اصلي محور عمود او یا موازي له قاعدو سره وي، نو ګډ فصل یې یوه دایره ده.
- که چېرې مستوي مخروط داسې قطع کړي چې مستوي اومخروط له اصلي محور سره یې زاویه قایمه نه وي، (مایل) لاس ته راغلي شکل الپس (Ellipse) یا بیضوي ده.
- که چېرې یوه مستوي یو مخروط داسې قطع کړي وي چې اصلي محور ته موازي او هغه په بر کې ونه لري، نو په دې حالت کې د هغوی له ګډ فصل څخه پارابولا (Parabola) په لاس راځي.
- که چېرې یوې مستوي دوه سر په سر یا څوکه په څوکه مخروطونه چې اصلي محور ته موازي وي قطع کړې وي، له ګډ فصل څخه یې هایپربولا (Hyperbola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي اصلي محور په برکې ولري، نو ګډ فصل یې له دوو متقاطع کرښو څخه عبارت دی. چې هر یو یې په پورته شکلونو کې ښودل شوي دي.

پوښتنې

1- د پورتني شکل په پام کې نیولو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې ګډ فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.

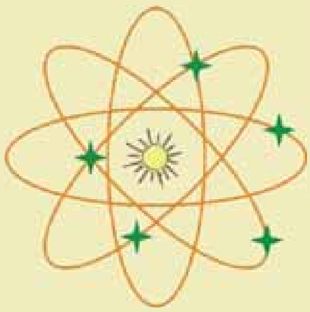
2- که چېرې یوه مستوي دوه څوکه په څوکه مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په برکې ولري، ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

3- د یوې مستوي او مخروط ګډ فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په دې حالت کې شکل رسم کړئ؟

بيضــوي

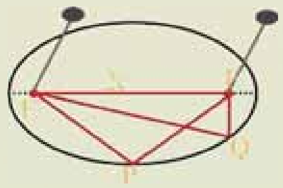
Ellipse

د سيارو حرکت د لمر په شاوخوا يا شمسي نظام څه ډول منحني ګانې جوړوي؟



فعاليت

- د يوې سپينې کاغدي پاڼې پر مخ دوه ستنې په يوه معين او ثابت واټن سره د F او F′ په دوو ټکو کې وټومبئ.
- د يو تار څوکې چې اوږدوالی يې د $\overline{FF'}=2c$ څخه زيات دي، په دواړو ستنو کې وتړئ، د لاندې شکل په پام کې نيولو سره يو پنسل د تار په غاړه د ستنو په شاوخوا وڅرخوئ.



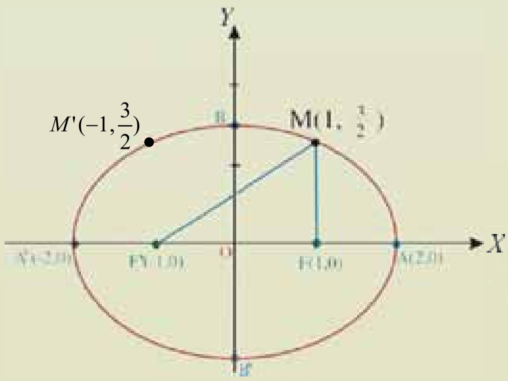
- هغه شکل چې د يوې بشپړې دورې په لاس راځي څه ډول منحني ده؟

له پورته فعاليت څخه لاندې پايله بيانولای شو:

پايله: هغه شکل چې ددوو ستنو تر منځ د معين او ثابت واټن په اندازه د تار په غاړه د پنسل له څرخولو څخه په لاس راځي، د الپس منحني بلل کيږي، د F او F′ ټکي د الپس د محراقونو په نامه ياديږي.

فعاليت

- په مخامخ شکل کې د F،F′، M،M′، A′ او A ټکو مختصات درکړل شوي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولو فارمول څخه په کار اخيستنې د $|MF'|$، $|MF|$ او $|AA'|$ اوږدوالی پيداکړی او بيا د $|AA'|$ او $|MF|+|MF'|$ اوږدوالي يو له بل سره پرتله کړئ.



- د $M'(-1,\frac{3}{2})$ ټکی د الپس په محیط باندې په نښه او همدارنګه د M' ټکی هم په پام کې ونیسئ.
- وروسته د $|M\,F'|+|M\,F|$ او $|M'\,F|+|M'\,F'|$ قیمتونه یو له بله سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

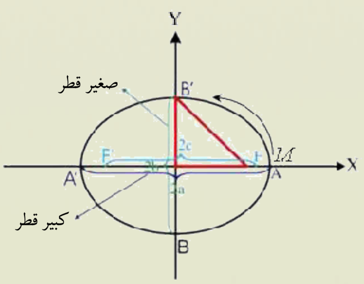
تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو ځای پر ځای ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل تل مساوي یا ثابت اوږدوالی ولري، بیضوي بلل کیږي، مستقر ټکی چې په F او F' تورو ښودل شوي، د الپس محراقونه او A', A د الپس راسونه چې $AA'=2a$ ثابت اوږدوالی دی.

$$|M'\,F|+|M'\,F'|=2a \quad , \quad |M\,F|+|M\,F|=2a$$

$$|M'\,F|+|M'\,F'|=|M\,F|+|M\,F'|=2a$$

د الپس قطرونه او راسونه:

الپس بې شمېره قطرونه لري، لوی یې کبیر قطر یا اوږد قطر چې له محراقونو څخه تیریږي او بیضوي په دوو ټکو د A', A کې قطع کوي، د کبیر قطر یا Major axis په نامه او کوچنی قطر یې د FF' د نیمايي په ټکي عمود دی چې د صغیر قطر یا Minor axis په نامه یادیږي. د A, A' او B, B' ټکی د الپس راسونه دي، کبیر قطر په A, A' چې اوږدوالی یې یعنې $AA'=2a$ او صغیر قطر په B, B' چې اوږدوالی یې $BB'=2b$ دی، ښودل کیږي.



یادداښت

که چېرې د M ټکی د صغیر قطر په راسونو یعنې په B یا B' باندې منطبق شي، په دې صورت کې له پورته شکل څخه لیکلای شو: $\overline{MF}=\overline{MF'}$

له بلې خوا پوهیږو چې:

$$|MF|+|MF'|=2a$$
$$2\overline{MF}=2a$$
$$\overline{MF}=a$$

د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه:

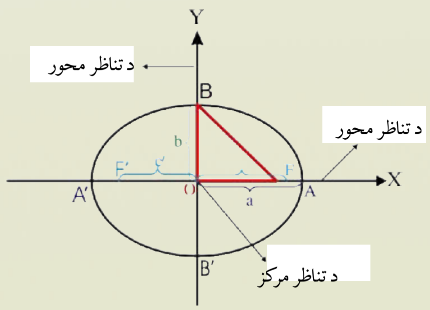
د محراقونو او قطرونو ترمنځ اړيکي د فيثاغورث د قضيې له مخې ليکلای شو:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

د الپس تناظري مرکز او تناظري محور:

الپس دوه تناظري محورونه لري چې يو يې لوی محور د $A\ A'$ پر قطر باندې منطبق دی چې محراقي محور هم بلل کيږي او بل يې کوچنی تناظري محور چې د $B\ B'$ پر قطر باندې منطبق دی.

د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی د الپس تناظري مرکز بلل کيږي او په (O) سره ښودل کيږي.



$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$$
$$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$$
$$\overline{OF} = \overline{OF'} = c$$

عن المرکزيت (**Eccentricity**): د يوې بيضوي شکل د عن المرکزيت په واسطه ټاکل کيږي عن المرکزيت د محراق او لوی محور له نسبت څخه عبارت دی، د بيضوي عن المرکزيت په e سره ښودل کيږي او د $e = \frac{c}{a}$ په شکل تعريف شوی دی.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

پوهيږو چې په هره بيضوي کې $0 < c < a$ دی، نو $0 < e < 1$ کيږي. د بيضوي د عن المرکزيت او قطرونو ترمنځ داسې رابطه شته $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

زده‌کوونکي دې د قطرونو او محورونو ترمنځ د رابطې په کارونې سره نوموړې رابطه په لاس راوړي.

یادونه: که چیرې د e قیمت صفر ته نژدې شي، محراقونه یې د مرکز خوا ته نژدې کیږي. دلته بیضوي تقریباً دایروي شکل غوره کوي. که چیرې e د 1 عدد ته نژدې شي، په دې صورت کې محراقونه د قطرونو د راسونو خواته نژدې کیږي چې یو اوږد شکل غوره کوي، د بیضوي په ډیرو مسایلو کې د عن المرکزیت څخه کار اخیستل کیږي.

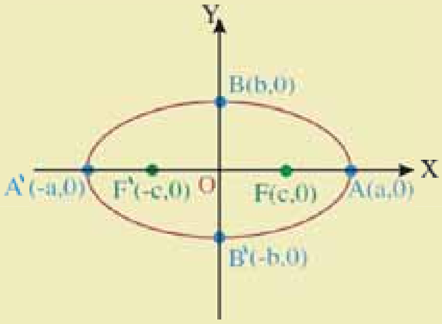
پوښتنې

1 – که چیرې په بیضوي کې د کبیر قطر او صغیر قطر اوږدوالی یو له بل سره مساوي وي، څه ډول منحنی په لاس راځي؟

2 – که چیرې د بیضوي عن المرکزیت $\frac{2}{3}$ وي، په دې صورت کې د کبیر قطر او صغیر قطر نسبت پیدا کړئ.

د بیضوي معادله

آیا د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، پیدا کولای شئ؟



فعالیت

- داسې بیضوي رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي او محراقونه یې د x د محور په مخ وټاکئ.
- د $M(x, y)$ یو اختیاري ټکی، د بیضوي پر محیط باندې وټاکئ او هغه له محراقونو سره ونښلوئ.
- د بیضوي د تعریف رابطه نظر د M ټکی ته ولیکئ.
- د M او F د ټکو ترمنځ واټن او همدارنګه د M او F′ د ټکو ترمنځ واټن پیدا کړئ او د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د بیضوي معادله په لاس راوړئ.

ثبوت لومړی حالت: موږ لرو:

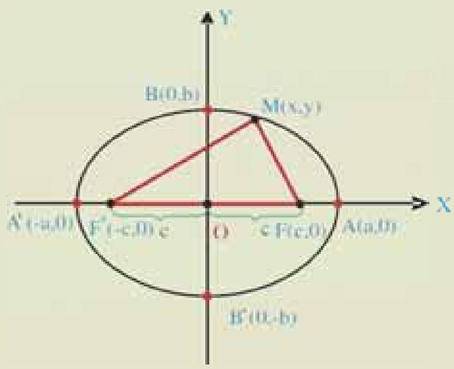
$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

یا:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$



د دواړو خواوو له مربع کولو وروسته لیکو چې:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 - 2cx - c^2 - y^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$-4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad / \div(-4)$$

یا
$$a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

د پورته رابطې دواړه خواوې بیا مربع کوو او لیکو:

$$(a^2+cx)^2=(a\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2[(x+c)^2+y^2]$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$a^4+c^2x^2-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2=0$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-c^2x^2-a^4=0$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

 څرنگه چې $a^2=b^2+c^2$ دي، نو $b^2=a^2-c^2$ کیږي، په دې صورت کې پورته معادله په لاندې توگه لیکو:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad / \div a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \qquad a>b$$

پورتنی معادله دداسې بیضوي معادله را ښیي چې د محراقونو وضعیه کمیات یې $(C,0)$, $(-C,0)$ او د x پر محور باندې واقع دي.

ثبوت دویم حالت: که چیرې د بیضوي محراقونه د y په محور باندې وي، په دې صورت کې د بیضوي معادله عبارت ده له: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$

زده کوونکي دې بیضوي رسم، د اوږد قطر، لنډ قطر او محراقونو مختصات دې ولیکي.

لومړی مثال: که چیرې د y پر محور باندې د بیضوي د اوږد قطر اوږدوالی یعنې $|AA'|=6$ او لنډ قطر اوږدوالی یعنې $|BB'|=4$ واحده وي، د بیضوي معادله پیدا کړئ.

حل :

$$|AA'|=2a=6$$
$$2a=6 \quad \Rightarrow \quad a=3$$
$$|BB'|=2b=4 \quad \Rightarrow \quad b=2$$

اوس د a او b قیمتونه په عمومي معادله کې ایږدو او معادله لیکو: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

دویم مثال:که چیرې د یوې بیضوي د اوږده قطر اوږدوالی $|AA'|=10$ او لنډ قطر اوږدوالی یې $|BB'|=8$ واحده وي، د بیضوي د اوږده او لنډ قطرونو د راسونو او محراقونو مختصات، محراقي فاصله، د عن‌المرکزیت قیمت پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پوهېږو چې:

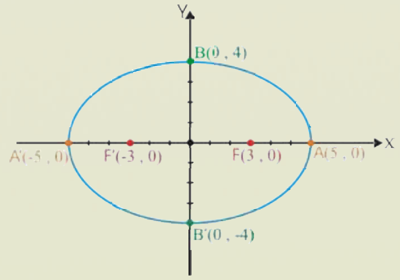
$$|AA'|=2a=10 \quad \Rightarrow \quad a=\pm 5$$
$$|BB'|=2b=8 \quad \Rightarrow \quad b=\pm 4$$

لیدل کیږي چې $a>b$ دی، نو اوږد قطر یې د x پر محور باندې پروت دی، د اوږده قطر د راسونو مختصات له $A(5,0)$ او $A'(-5,0)$ څخه عبارت دي.

د لنډ قطر د راسونو مختصات له: $B(0,4)$ او $B'(0,-4)$ څخه عبارت دي.

د محراقونو د مختصاتو د پیداکولو لپاره د c قیمتونه پیداکوو:

$$a^2=b^2+c^2$$
$$\Rightarrow (5)^2=(4)^2+c^2$$
$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 5^2-4^2=25-16=9$$
$$c=\pm 3$$



د محراقونو مختصات له $F(3,0)$ او $F'(-3,0)$ څخه عبارت دي.

عن‌المرکزیت: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}$ دي

دریم مثال: د داسې بیضوي ګراف رسم کړئ چې معادله یې $4x^2+y^2=16$ وي، د راسونو او محراقونو مختصات یې پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په 16 وېشو:

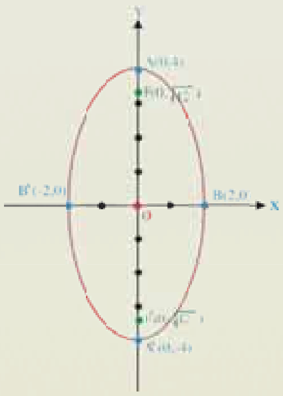
$$\frac{4x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{16}{16}$$
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

د راسونو مختصات:

$$a^2=16 \quad \Rightarrow \quad a=\pm 4 \quad \Rightarrow \quad A(0،4) \ ، \ A'(0 \ ، -4)$$
$$b^2=4 \quad \Rightarrow \quad b=\pm 2 \quad \Rightarrow \quad B(2،0) \ ، \ B'(-2 \ ، 0)$$

د محراقونو مختصات:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = (4)^2 - (2)^2$$
$$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = \pm\sqrt{12}$$
$$F(0,\sqrt{12}),\ F'(0,-\sqrt{12})$$



څلورم مثال: د بیضوي د محیط پر مخ د یوه ټکي مختصات $P(2,4)$ او د محراقونو مختصات يې له $F'(-3\sqrt{2},0), F(3\sqrt{2},0)$ څخه عبارت دي. د اوږده او لنډ قطر اوږدوالی يې پیدا کړئ.

حل: د بیضوي د تعریف له مخې لرو چې $|PF| + |PF'| = 2a$

د PF او PF′ د فاصلو اوږدوالی پیداکوو $|PF| = \sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2}$ او $|PF'| = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2}$

پورتني قیمتونه د تعریف په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2} + \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2a$$
$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16} + \sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16} = 2a$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{38+12\sqrt{2}} + \sqrt{38-12\sqrt{2}}\right)^2 = (2a)^2$$
$$38+12\sqrt{2} + 2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2}} + 38 - 12\sqrt{2} = 4a^2$$
$$76 + 2\sqrt{1444-288} = 4a^2 \Rightarrow 76 + 2\cdot 34 = 4a^2$$
$$\Rightarrow 76 + 68 = 4a^2 \Rightarrow 144 = 4a^2 \ /\div 4$$
$$\Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = \pm 6$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 = 18 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$
$$2a = 2\cdot 6 = 12$$
$$2b = 2\cdot 3\sqrt{2} = 6\cdot\sqrt{2}$$

پوښتنې

1 – لاندې معادلې په پام کې ونیسئ د اوږده قطر اوږدوالی د راسونو او محراقونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

$a)\ \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ $\qquad b)\ \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

2 – د هغې الپس معادله ولیکئ چې عن‌المرکزیت يې 0.8 وي.

د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

ایا دداسې بیضوي معادله پیداکولای شو چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

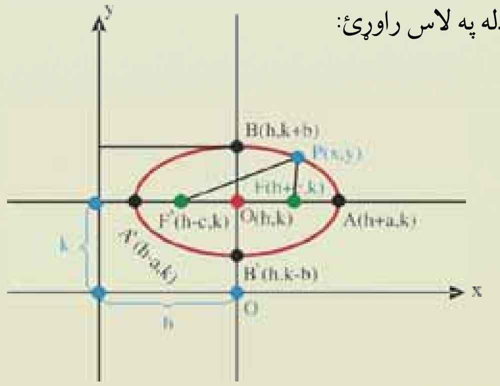
فعالیت

یوه بیضوي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ چې مرکز یې (h,k) او لوی قطر یې د x له محور سره موازي وي.

د $P(x,y)$ یو ټکی د بیضوي په محیط باندې په پام کې ونیسي او هغه له F او F' سره ونښلوئ.

د بیضوي د مرکز مختصات (h,k) په پام کې نیولو سره د محراقونو F او F'، راسونو A , A' او B, B' وضعیه کمیات په شکل کې وښیاست.

د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې او د بیضوي د تعریف د رابطې په کارونې سره معادله په لاس راوړئ:



$$|\overline{PF}|+|\overline{PF'}|=2a$$

$$|\overline{PF}|=\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

$$|\overline{PF'}|=\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

یا:

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع او له اختصار وروسته لاندې رابطه په لاس راځي:

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[(x-h)+c]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[(x-h)+c]^2$$

$$x^2-2hx-2cx+h^2+2hc+c^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2hx+h^2+2cx-2hc+c^2$$
$$4hc-4cx=4(a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2})$$
$$hc-cx=a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$
$$c(h-x)-a^2=-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} \quad / \div(-1)$$
$$c(x-h)+a^2=a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع او ليکو:

$$c^2(h-x)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[\{x-(h+c)\}^2+(y-k)^2]$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[(x-h)+c]^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$
$$(x-h)^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$
$$-(x-h)^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=-a^2(a^2-c^2)$$

څرنګه چې په بيضوي کې $a^2-c^2=b^2$ کېږي، نو ليکلای شو:

$$-b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=-a^2b^2 \quad / \div(-a^2b^2)$$
$$=\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

لومړی مثال: د يوې بيضوي د مرکز، محراقونو او اوږد قطر د انجامونو مختصات چې معادله يې $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ ده، پيدا او ګراف يې رسم کړئ.

حل: څرنګه چې نوموړې معادله عمومي شکل لري، له دې امله د مرکز مختصات يې $(6,-4)$ ده، لوی محور يې د x له محور سره موازي دی.

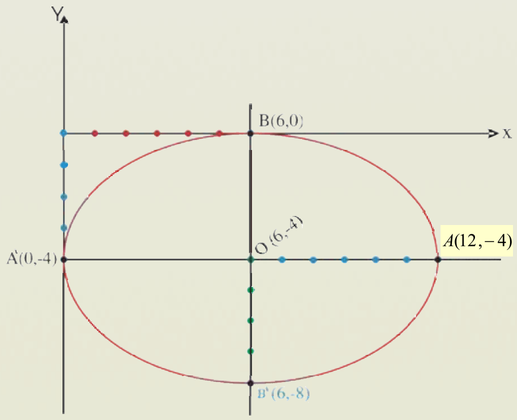
$$a^2=36 \Rightarrow a=\pm 6$$
$$b^2=16 \Rightarrow b=\pm 4$$
$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=\pm 2\sqrt{5}$$

د A او A' مختصات عبارت دي له:

$$A(h+a\ ,\ k)=A(6+6،\ -4)=A(12،\ -4)$$
$$A'(h-a\ ,k)=A'(6-6،\ -4)=A'(0،\ -4)=A'(0،\ -4)$$

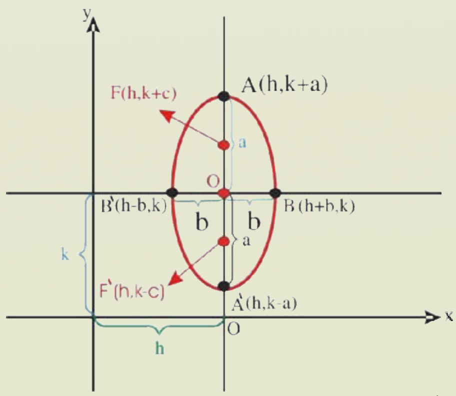
د B او B′ مختصات عبارت دي له:

$$B(h,k+b)=B(6,-4+4)=B(6,0)$$
$$B'(h,k-b)=B'(6,-4-4)=B'(6,-8)$$
$$F(h+c,k)=F(h+c,k)=(6+2\sqrt{5},-4)$$
$$F'(h-c,k)=F'(h-c,k)=(6-2\sqrt{5},-4)$$



دويم حالت: که چېرې محراقي محور د y له محور سره موازي وي، په دې حالت کې معادله لاندې بڼه غوره کوي.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$
$$A(h\,,k+a)\,,\ A'(h,k-a)$$
$$B'(h-b\,,k)\,,\ B(h+b,k)$$
$$F'(h,k-c)\ \,,\ F(h\,,k+c)$$



د محراقونو او راسونو مختصات دې زده کوونکو ته دنده ورکړل شي.

يادونه: د $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ معادله هم د بيضوي عمومي معادله ده، په داسې حال کې چې $A \neq C$ او هم علامه وي، يعنې $C>0$, $A>0$ يا $C<0$, $A<0$

دويم مثال: د $16x^2+25y^2-64x+50y-311=0$ معادله د بيضوي د معياري معادلې په ډول وليکئ.

حل: د مربع له بشپړولو څخه په کار اخيستنې سره يې په معياري ډول بدلوو .

$$16x^2+25y^2-64x+50y=311$$
$$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$$
$$16(x^2-4x+4-4)+25(y^2+2y+1-1)=311$$
$$16[(x-2)^2-4]+25[(y+1)^2-1]=311$$
$$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311$$
$$=16(x-2)^2+25(y+1)^2=311+64+25$$
$$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$$

د پورته معادلې دواړه خواوې په 400 وېشو: $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$

پورتنی معادله دداسې بیضوي معادله ده چې مرکز یې د $(2, -1)$ ټکی دی.

دریم مثال: د بیضوي لاندې معادله د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

حل : لومړی معادله ترتیب بیا د مربع له بشپړولو څخه په کار اخیستنې سره هغه په معیاري شکل بدلوو:

$$x^2+4x+9(y^2-2y)-23=0$$

$$x^2+4x+(2)^2-(2)^2+9[y^2-2y+(1)^2-(1)^2]-23=0$$

$$\underbrace{x^2+4x+(2)^2}_{\text{کامله مربع}}-(2)^2+9\underbrace{\left[y^2-2y+(1)^2\right]}_{\text{کامله مربع}}-(1)^2-23=0$$

$$(x+2)^2-4+9(y-1)^2-9-23=0$$

$$(x+2)^2+9(y-1)^2-36=0$$

$$(x+2)^2+9(y-1)^2=36$$

د مساوات دواړه خواوې په 36 وېشو:

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

پوښتنې

1. د بیضوي په لاندې معادلو کې د مرکز، محراقونو او راسونو مختصات پیدا کړئ.

$a)\ \frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ $\qquad$ $b)\ x^2+2y^2+4x-12y+20=0$

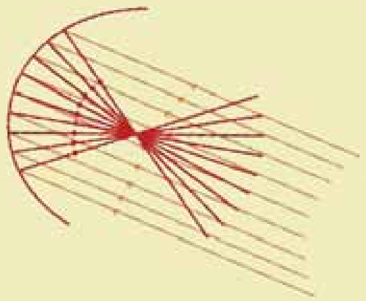
2. د داسې بیضوي معادله ولیکئ چې مرکز یې د $(0,2)$ ټکی، محراق یې د $(2, 6)$ ټکی او د $(4,6)$ له ټکي څخه تیره شي.

3. د بیضوي لاندې معادلې د معیاري معادلو په ډول ولیکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعیه کمیات او همدارنگه د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المرکزیت پیدا او گرافونه یې رسم کړئ.

$a)\ 9x^2+25y^2-36x-150y+36=0$ $\qquad$ $b)\ 16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$

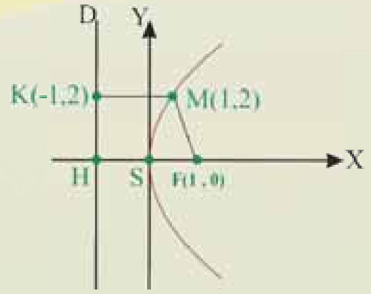
پارابولا

Parabola



کـه چېـرې د لمـر وړانګـې پـه يـوې معقـرې عدسـيې ولـوېږي، انعکاسي(منعکسه) وړانګې یې له کوم ټکي څخه تېرېږي؟ دغه ټکی څه نومیږي او د عدسيې ګډ فصل له يوې متقاطع مستوي سره چې د عدسيې محور په برکې ولري. څه ډول منحني ده؟

فعاليت

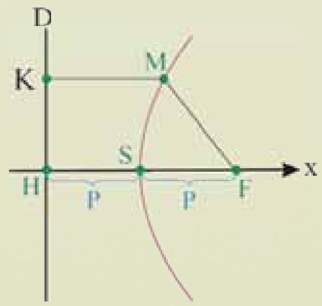


د فعاليت د سرته رسولو لپاره مخامخ شکل په پام کې ونيسئ پـه شکل کې د M، F او K ټکو مختصات درکړل شوي دي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولو لـه فارمول څخه پـه کار اخيستنې سره د FM او KM هر يو اوږدوالی پيدا او يـو لـه بل سره يې پرتله کړئ.

له پورته فعاليت څخه لاندې تعريف بيانولای شو:

تعريف: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د يوه ثابت يا مستقر ټکي او يوه ثابت مستقيم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کيږي. دغه ثابت يـا مستقر ټکـی د پارابولا محراق (F) او د D ثابت مستقيم خط ته د پارابولا موجه (Directrix) وايي $\overline{MF} = \overline{MK}$

هغه مستقيم خط چې د پارابولا له محراق او راس څخه تير او د موجه (D) پر مستقيم خط عمود وي، د پارابولا د محراقي يا تناظري محور په نامه يادیږي.



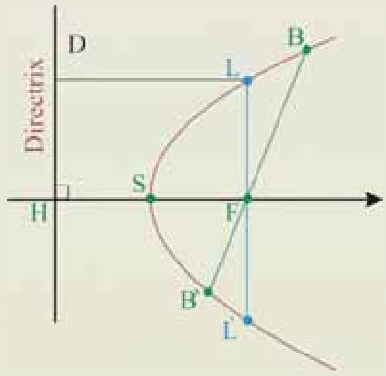
د تناظري محور او منحني ګډ ټکی د پارابولا راس او پـه S سره ښودل کيږي.

آيا ويلای شئ چې S د $\overline{FH}$ نيمايي ټکی دی، ولې؟

په پارابولا کې عن المرکزيت $(e = 1)$ دی ولې؟

د پارابولا وترونه:

هغه مستقیم خط چې د پارابولا دوه ټکی سره ونښلوي، د پارابولا وتر بلل کیږي. په شکل کې $\overline{BB'}$ چې د پارابولا له محراق څخه تیر شوي دی، محراقي وتر دی او LL' چې د محراق په ټکي کې د تناظر پر محور باندې عمود دی عمودي وتر بلل کېږي.



پوښتنې

د پارابولا د محراقي وتر اوږدوالی د $\overline{FH}$ څو برابره دی.

د پارابولا معادله

د هغې پارابولا د معادلې د پیداکولو لپاره چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، لاندې فعالیت پـه پـام کـې ونیسئ.

$$y^2 = 4px$$
$$x^2 = 4py$$

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو قایم سیستم په پام کې ونیسئ او د y له محور سره د هادي موازي خط رسم کړئ.
- د پارابولا منحني داسې رسم کړئ چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د x پر محور باندې محراق داسې وټاکئ چې فاصله یې له مبدا څخه د هادي خط له فاصلې سره مساوي وي.
- په منحني باندې د $M(x, y)$ ټکـی وټـاکئ ، هغه لـه F سـره ونـښلوئ او د M له ټکي څخه یـو عمـود پـر هادي(موجه خط) باندې رسم او د تقاطع ټکي ته یې K ووایاست.
- د F او K د ټکو مختصات ولیکئ.

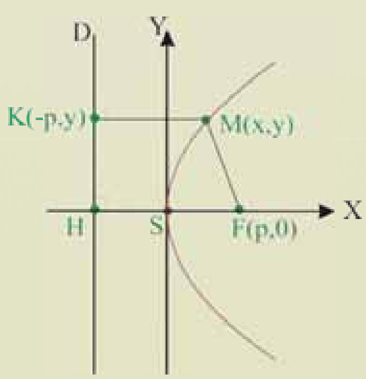
اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د F, M او K, M ټکـو تـرمنځ فاصله پیدا کړئ او بیا د پارابولا معادله د $|MF| = |MK|$ له رابطې څخه په لاس راوړئ.

ثبوت لومړی حالت: پوهیږو چې:

$$|MF| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$
$$|MK| = x + p$$

اوس د $|MF|$ او $|MK|$ قمیتونه د $|MF| = |MK|$ په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$



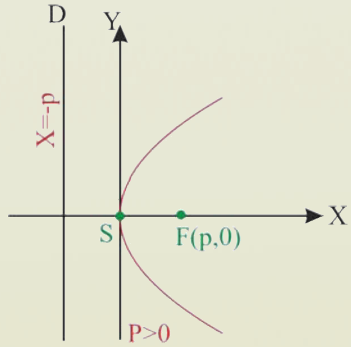
د پورته معادلې دواړه خواوې مربع کوو:

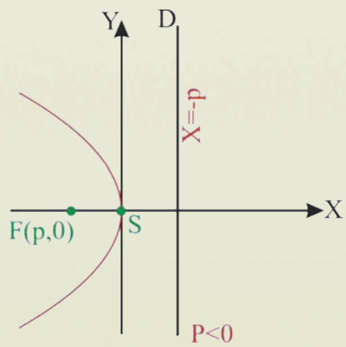
$$(\sqrt{y^2 + (p-x)^2})^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + (p-x)^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4px$$

وروستی رابطه دداسې پارابولا معادله راښيي چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې $F(p,0)$ د پارابولا محراق د x پر محور باندې پروت دی او موجه خط يې $x=-p$ دی.

که چيرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور ښي خواته خلاصه ده.

که چيرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور باندې کيڼې خواته خلاصه ده.





لومړی مثال: د داسې پارابولا معادله په لاس راوړئ چې د محراق مختصات يې $F(2,0)$ ، د هادي مستقيم خط معادله $x=-2$ سره وي او همدارنگه د عمودي وتر د انجامونو مختصات يې پيدا کړئ.

حل : د محراق مختصات چې د x په محور باندې دي، وبلاي شو $P=2>0$ ، له دې امله د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

لرو چې: $y^2=4px$

اوس د $P=2$ قيمت په معادله کې ايږدو:

$$y^2=4\cdot 2x \quad \Rightarrow \quad y^2=8x$$

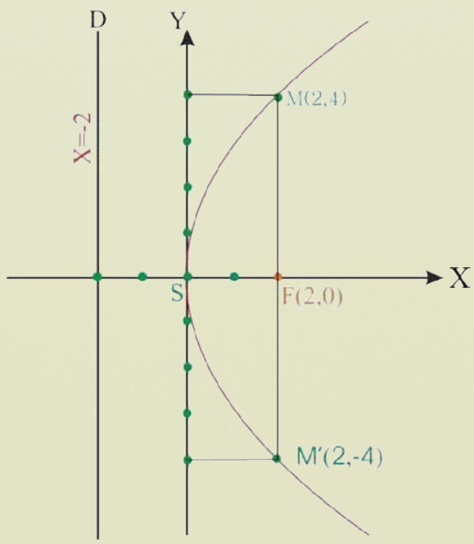
که چيرې د $x=2$ قيمت د $y^2=8x$ په معادله کې کېږدو، په دې صورت کې د پارابولا دوه ټکي چې د عمودي وتر انجامونه دي په لاس راځي، هغه عبارت دي له:

$$y^2=8\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad y^2=16$$

$$y=\pm 4$$

$$M(2,4) \quad , \quad M'(2,-4)$$

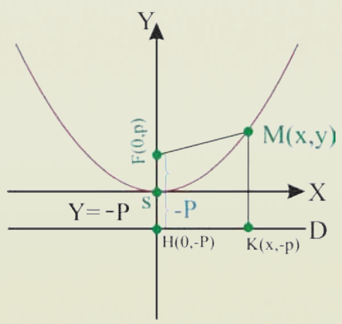
د پورته معلوماتو له مخې $y^2=8x$ پارابولا گراف رسم کړئ.



دويم حالت: که چيرې د پارابولا محراق (F) د y پر محور باندې پروت او د D مستقيم خط د x له محور سره موازي وي، د پارابولا معياري معادله پيداکړئ.

حل: د پورته غوښتنې لپاره په پارابولا باندې يوټکی، لکه: $M(x,y)$ په پام کې نيسو، د پارابولا د تعريف له مخې ليکلای شو:

ثبوت:

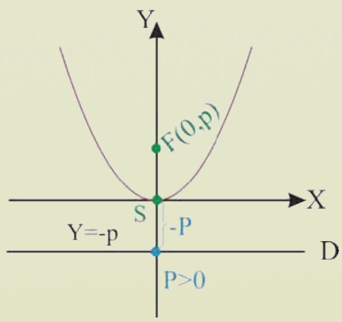


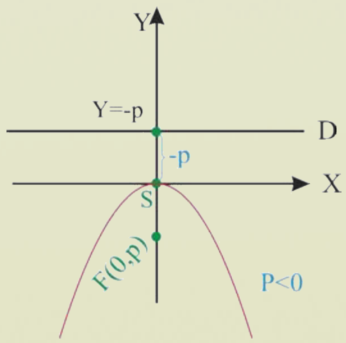
$$|\overline{MF}| = |MK|$$
$$|\overline{MF}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$
$$|\overline{MK}| = \sqrt{(x-x)^2 + [(y-(-p)]^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x^2 + (y-p)^2})^2 = (\sqrt{(y+p)})^2$$
$$\Rightarrow x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$\Rightarrow x^2 = 4py$$

پورته معادله دداسې پارابولا معادله ده چې راس يې د وضعيه کمياتو د سيستم په مبداکې او محراقي محور يې د y محور دی چې د محراق مختصات يې $F(0,p)$ او $y=-p$ يې د هادي مستقيم خط معادله ده.

که چيرې $p > 0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چيرې $p < 0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.



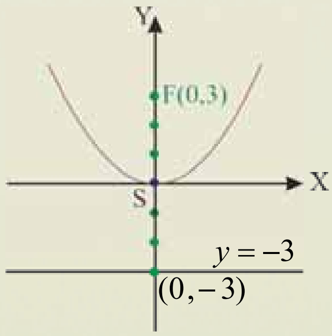


دويم مثال: د $x^2 = 12y$ په معادله کې د پارابولا د راس، محراق مختصات، د هادي خط معادله پيدا او گراف يې رسم کړی.

حل : **لومړي** د $x^2 = 4py$ په معادله کې د p قيمت په لاس راوړو.

$$4p = 12$$
$$p = 3$$

څرنگه چې $P = 3 > 0$ څخه دی، نو د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.



1 – د راس مختصات عبارت دي له: $\left.\begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow S(0,0)$

2 – د محراق مختصات عبارت دي له : F (0, 3)

3 – د هادي خط معادله عبارت ده له: $y = -p \Rightarrow y = -3$

پوښتنې

1 – د $y^2 - 4x = 0$ او $x^2 = 2y$ معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعيه کميات او د هادي (موجه خط) معادلې پيدا او گرافونه يې رسم کړئ.

2 – د لاندې قيمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پيدا کړئ.

$a)\ S(0,0) \qquad F(0,5)$

$b)\ S(0,0) \qquad F(-2,0)$

د هغې پارابولا معیاري معادله چې راس یې یو اختیاري ټکی وي

آیا د داسې پارابولا معادله پیداکولای شوچې د راس مختصات یې د وضیعه کمیاتو په مبداکې نه وي.

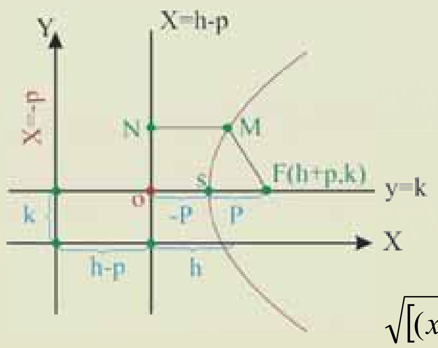
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

فعالیت

- یوه پارابولا د وضیعه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ چې مرکز یې (h,k) او د تناظري محور یې د x له محور سره موازي وي.
- د پارابولا په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ او هغه له F سره ونښلوئ، بیاد M له ټکي څخه یو عمود خط پر ها دي خط(موجه) باندې رسم او هغه ته N وواياست.

اوس د دووټکو ترمنځ د فاصلې څخه دپیداکولو په ګټې اخېستنې سره د F, M او N, M ټکو ترمنځ فاصله پیدا کړئ، بیا دهغې پارابولا معادله چې مرکز یې $S(h,k)$ ده، په لاس راوړئ.

ثبوت:خرنګه چې د F او M ټکو وضیعه کمیات پیژنو او همدارنګه د N وضیعه کمیات له $(h-p,y)$ څخه عبارت دی، د پارابولا د تعریف له مخې لیکو



$$|MF| = |MN|$$

د دوو ټکوتر منځ د فاصلې له مخې لرو:

$$\sqrt{[(x-(h+p)]^2 + (y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-p)]^2 + (y-y)^2}$$

د واړه خو اوي مربع کوو او له اختصار وروسته لیکو:

$$[(x-(h+p)]^2 + (y+k)^2 = [x-(h-p)]^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 2(h+p)x + (h+p)^2 + y^2 - 2ky + k^2 = x^2 - 2(h-p)x + (h-p)^2$$

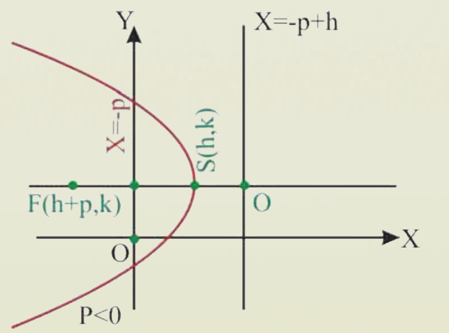
د پورته رابطې له پراختیا او ساده کولو وروسته په لاس راځي چې:

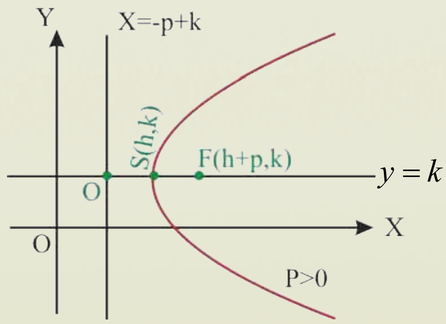
$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$$
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

پورتنی معادله د هغې پارابولا معادله ده، چې د راس وضعیه کمیات یې $S(h,k)$ محراق یې $F(h+p,k)$ او د موجه خط معادله یې $x=-p+h$ ، تناظري محور یې $y=k$ دی.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.





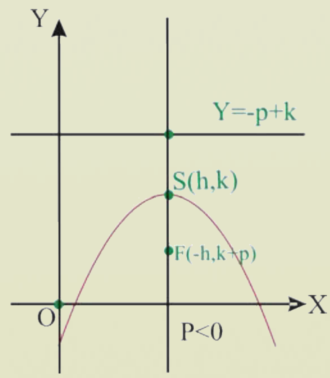
دویم حالت:د هغې پارابولا معادله چې تناظري محور یې د y له محور سره موازي وي، عبارت ده له: $(x-h)^2=4p(y-k)$

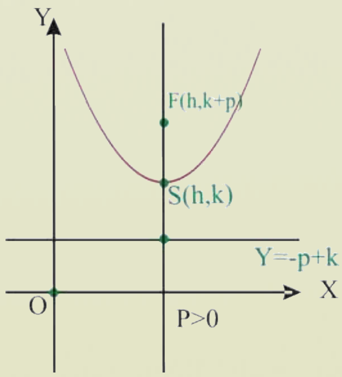
چې د پارابولا د راس مختصات $S(h,k)$ او د محراق مختصات یې $F(h,k+p)$ دي.

$y=k-p$ د پارابولا د هادي خط معادله او $x=-h$ تناظري محور دی.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





لومړی مثال: غواړو د $(x-1)^2=12(y-2)$ د پارابولا په معادله کې د راس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله، تناظري محور او د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا کړو.

حل: څرنګه چې معادله د $(x-h)^2=4p(y-k)$ عمومي شکل لري.

نو $k=2, h=1$ کيږي، په دې صورت کې د پارابولا درأس وضعيه کميات عبارت دي له: $S(1,2)$

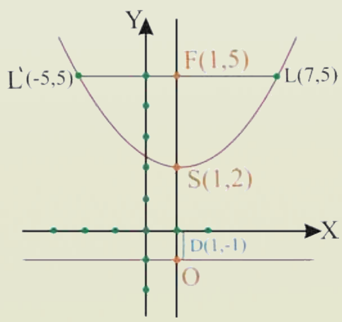
$$4p=12 \Rightarrow p=\frac{12}{4}=3$$

د محراق مختصات: $F(h,k+p)=F(1,2+3) \Rightarrow F(1,5)$

د موجه خط معادله $y=k-P \Rightarrow 2-3=-1$

د تناظر محور: $x=h \Rightarrow x=1$

د عمودي و تر دانجامونو د مختصاتو د پيدا کولو لپاره د y قيمت چې په محراق کې لـرو پـه عـمـومي معادلـه کې اېږدو يعنې $y=5$ دی.



$$(x-2)^2=12(5-2)$$
$$(x-1)^2=12\cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2=36$$
$$(x-1)=\pm 6$$
$$x_1=6+1=7,\ x_2=-6+1=-5$$
$$L(7,5) \quad L'(-5,5)$$

دويم مثال: د $(y-4)^2=-6(x+3)$ معادله په پام کې ونيسی، د پـارابولا دراس او محـراق مختـصات د موجـه خط معادله، تناظري محور معادله، د عمودي و تر د انجامونو مختصات پيدا اوگراف يې رسم کړئ.

حل:دراس مختصات: $k=4, h=-3 \Rightarrow S(-3,4)$

$$4P=-6 \Rightarrow P=-\frac{3}{2}$$

څرنگه چې $-\frac{3}{2}<0$ ده، نو د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.

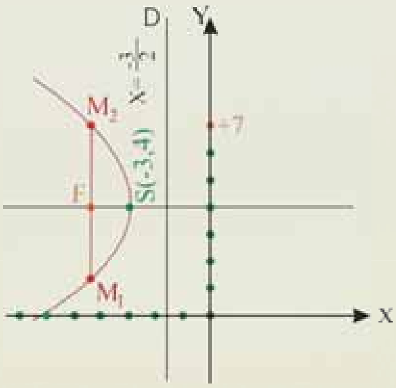
د محراق مختصات: $F(h+p,k)=(-\frac{9}{2},4)$

موجه خط معادله عبارت ده له: $x=h-p \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

د تناظري محور معادله: $y=k \Rightarrow y=4$

د $x=-\frac{9}{2}$ قيمت په معادله کې اېږدو او د عمودي وتر د انجامونو مختصات په لاس راځي.

$$(y-4)^2=-6(x+3)=-6(-\frac{9}{2}+3)$$
$$(y-4)^2=9 \Rightarrow y-4=\pm 3$$
$$y_1=3+4=7$$
$$y_2=-3+4=1$$
$$M_2(-\frac{9}{2},7)\ ,\ M_1(-\frac{9}{2},1)$$



یادونه: د $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$ د معادلې ګراف یوه پارابولا ده، په داسې حال کې چې $C\neq 0\ ,\ A=0$ وي یا $C=0, A\neq 0$ وي).

پوښتنه: د $(x-h)^2=4p(y-k)$ معادله په پراختیایي ډول ولیکئ.

دریم مثال: د $y^2-2y+8x+25=0$ پارابولا معادله، د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ د راس، محراق مختصات، د مؤجه خط معادله او تناظري محور یې پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوي معادله کې $A=0$ دی، نو نظر د y متحول ته یې، مربع بشپړوو.

$$y^2-2y+(1)^2-(1)^2+8x+25=0$$
$$(y-1)^2+8x+24=0 \Rightarrow (y-1)^2+8(x+3)=0$$
$$\Rightarrow (y-1)^2=-8(x+3)$$

په معادله کې لیدل کیږي: $4P=-8 \Rightarrow P=-2$

دراس مختصات: $k=1\ ,\ h=-3 \Rightarrow S(-3,1)$

$F(h+p,k)\Rightarrow F(-3-2,1)\Rightarrow F(-5,1)$ ، د موجه خط معادله $x=h-p \Rightarrow x=-3+2=-1$

تناظر محور عبارت له $y=1 \Rightarrow y=k$ څخه دی.

پوښتنې

1ـ د لاندې پارابولا معادله پیدا کړې، په داسې حال کې چې:

$a)\ S(1,3), F(-1,3)$

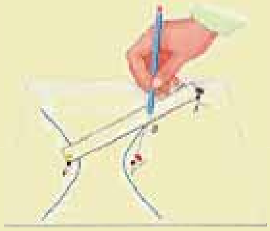
2- د $(y-1)^2=12(x-4)$ په معادله کې د پارابولا دراس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله او د تناظر محور پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

3- لاندې معادلې د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ او ګراف یې رسم کړئ.

$a)\ y^2-6y+8x+41=0$ $\qquad b)\ x^2-2x-6y-53=0$

هـایپـربـولا

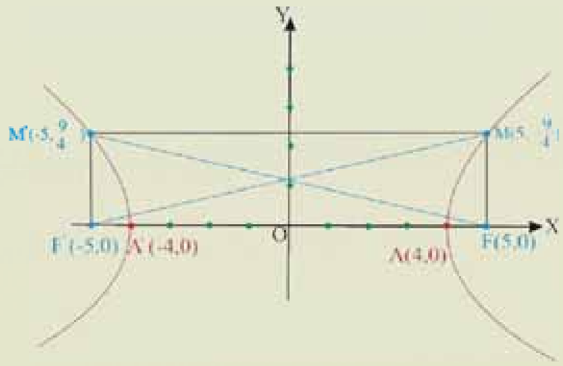
Hyperbola



په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو مستقروټکو څخه تل له یوه ثابت اوږدوالي سره مساوي وي، څه ډول یوه منحني کیدلاي شي؟

فعالیت

- په لاندې شکل کې د A, M', M, F', F او A' ټکو مختصات درکړل شوي دي.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې دپیدا کولو له فارمول څخه په کار اخېستنې سره د $|MF|, |MF'|$ او $|AA'|$ اوږدوالي پیدا کړئ.
- د $|MF| - |MF'|$ د تفریق حاصل په لاس راوړئ او د $|AA'|$ له اوږدوالي سره يې پرتله کړئ.
- پورتني فعالیت د M' ټکي لپاره تطبیق او پایله يې ولیکئ
- د $|MF| - |MF'|$ او $|M'F| - |M'F'|$ د تفریق حاصل یو له بل سره پرتله کړئ.



د پورتني فعالیت له سرته رسولو وروسته لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په یوه مستوي کې دهغه ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې لـه دوو ځای پـر ځـای ټکـو څخـه تـل مساوي اوږ دوالی ولري، هایپربولا Hyperbola بلل کیږي.

دوه مستقر ټکي د ها یپربولاد محراقونو په نامه یادیږي، پـه شـکل کـې F او F' د هـایپربولا محراقونـه M او M' د هایپربولا دوه اختیاري ټکي دي، په دې صورت کې لیکو:

$$|M'F| - |M'F'| = |MF| - |MF'| = |AA'| = 2a$$

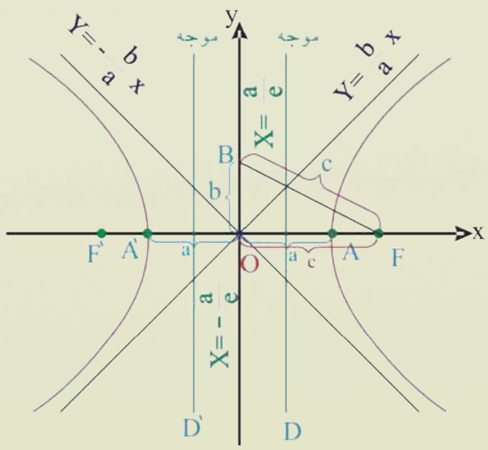
د FF' منځنی ټکی د هایپربولا مرکز دی، دمرکز او هر یوه راس ترمنځ فاصله، لکه بیضوی په هایپربولا کې هم $AA'=2a$ او $FF'=2c$ اوږدوالی لري.

د هایپربولا تناظري محورونه او راسونه:

د بیضوي په ډول هایپربولا هم دوه تناظري محورونه لري چې یوې په FF' باندې منطبق او د هایپربولا له راسونو څخه تیرېږي. بل یې د FF' عمودې نیمایي کوونکی دی. د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی یا ځای، دهایپربولا مرکز بلل کیږي. هغه تناظري محور چې له FF' څخه تیرېږي، د متقاطع محور په نامه یادیږي، څکه چې هایپربولا د A او A' په دوو ټکو کې قطع کوي چې دې دوو ټکوته د هایپربولا راسونه وایې او اوږدوالې له $|AA'|=2a$ څخه عبارت دی.

هغه خط چې د هایپربولا په مرکز کې په متقاطع محور باندې عمود دی او هایپربولا نه قطع کوي، خو د مرکز دواړو خواوته د B او B' دوه ټکي په پام کې نیسو چې $OB=OB'=b$ وي، دا دوه ټکي د هایپربولا غیر حقیقي راسونه بلل کیږي چې $|BB'|=2b$ غیر حقیقي محور دی.

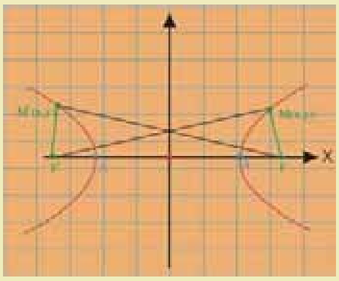
په یوه هایپربولا کې د b,a او c اوږدوالو ترمنځ داسې رابطه شته: $c^2=a^2+b^2$



عن المرکزیت: څرنګه چې په هایپربولا کې $c>a$ دي، نو $e>1$ کیږي. چې د c,b,a او عن المرکزیت ترمنځ د $e=\sqrt{1+\frac{b2}{a2}}$ رابطه شته. زده کوونکي دې د $e=\frac{c}{a}$ له رابطې څخه په کار اخیستې سره نوموړې رابطه په لاس راوړي.

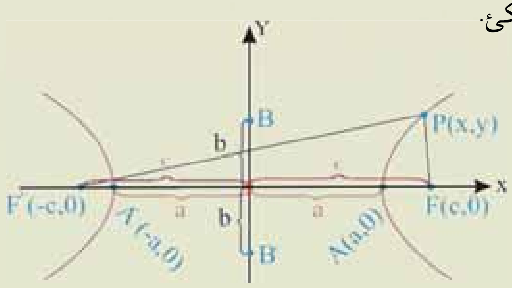
د هایپربولا معادله

آیا داسې یوه هایپربولا رسمولای شئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي؟



فعالیت

- داسې هایپربولا رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د $P(x,y)$ ټکی په هایپربولا باندې وټاکئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ
- د F, P او F' ټکو ترمنځ د هایپربولا د تعریف رابطه ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د PF او PF' فاصلې پیداکړې او بیا د هغو تفاضل په لاس راوړئ.



د هایپربولا د تعریف له مخې لیکو: $|PF'|-|PF|=2a$

د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له فارمول څخه لیکلای شو.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

د مساوات د دواړو خواوله مربع او انکشاف څخه وروسته لرو:

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$
$$\Rightarrow 4cx-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \;/\div 4$$
$$\Rightarrow cx-a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

بیا هم د مساوات دواړه خواوې مربع او انکشاف ورکوو:

$$(cx-a^2)^2 = a^2(x-c)^2+y^2$$
$$c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$
$$c^2x^2-\cancel{2a^2cx}+a^4 = a^2x^2-\cancel{2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2$$
$$\Rightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2 = a^2c^2-a^4 \quad \Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې $c > a$ دی، نو $c^2 - a^2 > 0$ کیږي، له بلې خوا پوهیږو چې $c^2 - a^2 = b^2$ ده، نو په پورته افاده کې د $c^2 - a^2$ قیمت په ایښودلو سره لیکلای شو: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
د مساوات د واړه خواوې پر a^2b^2 باندې وېشو:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

پورتنې معادله د داسې هایپربولا معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیات په مبدأ او محراقونه یې په افقي محور پراته دي.

دویم حالت: که چیرې متقاطع محور یعنې AA' د y پر محور پروت وي، یعنې محراقونه په عمودې محور پراته وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده له: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

پوښتنه

پورته فارمول او همدارنګه د محراقونو او راسونو مختصات دې د شکل له مخې د زده کوونکو په واسط پیداشي.

د هایپربولا موجه خط:

که چیرې د هایپربولا محراقونه د x یا y په محورونو پراته وي، په دې صورت کې لیکلای شو چې:

$$e = \frac{c}{a} \;\Rightarrow\; e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

له دې امله ویلای شو چې دا موجه خطونه په متقاطع محور باندې عمود دي چې د هغو فاصله د هایپربولا له مرکز څخه د $\pm\frac{a}{e}$ یا $\pm\frac{a^2}{c}$ څخه عبارت ده.

د هغې هایپربولا د ها دې خط معادلې چې محراقونه یې د y پر محور باندې پراته دي له $y = \pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

او د هغې هایپربولا د ها دې خط معادلې چې محراقونه یې د x پر محور باندې پراته دي له $x = \pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

د هایپربولا مجانبونه:

هغه مستقیم خطونه چې د هایپربولا له مرکز څخه تیر اوپه لایتناهي کې د هایپربولا له منحنې سره مماس وي. د هایپربولا مجانبونه بلل کیږي .

د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هایپربولا معادله په پام کې نیسو:

$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2$$
$$a^2y^2=b^2(x^2-a^2)$$
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}\left[x^2(1-\frac{a^2}{x^2})\right]$$
$$\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

که چیرې په پورتني رابطه کې x لایتناهي ته نژدې شي د $\frac{a^2}{x^2}$ کسر د صفر خواته نژدې کیږئ په پایله کې $\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$ د یوه عدد ته تقرب کوي، په دې صورت کې $y=\pm\frac{b}{a}x$ لاس ته راځي.

نو $y=\pm\frac{b}{a}x$ د هغو مجانبونو معادلې دي چې د هایپربولا محراقونه د x پر محور باندې پراته وي.

که چیرې محراقونه د y پر محور باندې پراته وي، د مجانبونو معادلې یې له $y=\pm\frac{a}{b}x$ څخه عبارت دي.

لومړي مثال: د هایپربولا د $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ په معادله کې د محراقونو مختصات، د راسونو مختصات، د موجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا او په شکل کې وښایاست.

حل: دراسونو مختصات: $a^2=16\Rightarrow a=\pm4\Rightarrow A(4,0),A'(-4,0)$

د محراقونو مختصات: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=\pm2\sqrt{5}$

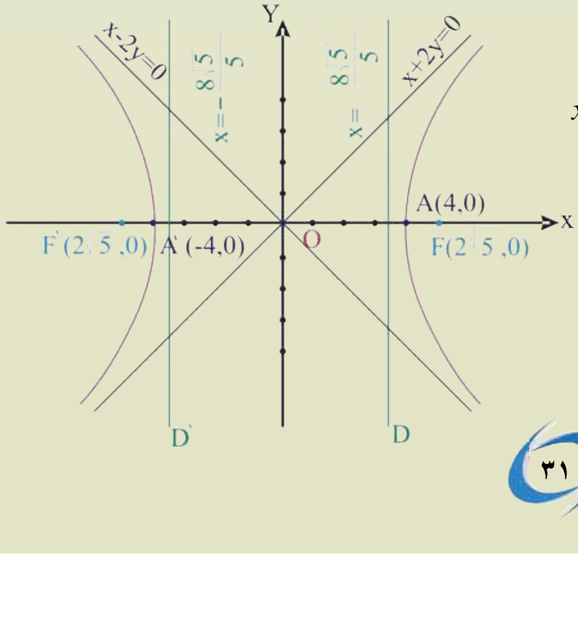
$$\Rightarrow F(2\sqrt{5},0),F'(-2\sqrt{5},0)$$

د موجه خطونو معادلې: څرنګه چې محراقونه د x پر محور باندې پراته دي.

له دې امله:

$$x=\pm\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}=\frac{4^2}{2\sqrt{5}}=\frac{16}{2\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}x\quad\Rightarrow\quad y=\pm\frac{2}{4}x=\pm\frac{1}{2}x$$
$$2y=\pm x$$

یا: $x=\pm2y\quad\Rightarrow\quad x+2y=0,x-2y=0$



دویم مثال: وښیاست چې $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$, د هایپربولا یوه معادله ده، په نوموړي معادله کې د محراقونو، راسونو مختصات، د مجانبونو او موجه خطونو معادلې پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پورتنی معادله د هایپربولا د معیاري معادلې شکل لري چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او د y محور یې متقاطع محور دی چې محراقونه ور باندې پراته دي.

د راسونو مختصات: $A(0,2)\ ,\ A'(0,-2)$ $\qquad a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$

$$b^2=9\Rightarrow b=\pm 3$$

د محراقونو مختصات: $c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=4+9=13\Rightarrow c=\pm\sqrt{13}$

د مجانبونو معادلې: $F'(0,-\sqrt{13})\quad ,\quad F(0,\sqrt{13})$

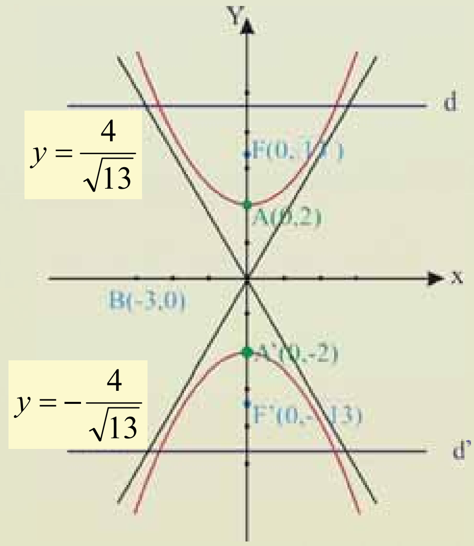
څرنګه چې متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{b}x\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{2}{3}x\ \Rightarrow\ 3y=\pm 2x$$

$$3y-2x=0\quad ,\quad 3y+2x=0$$

د موجه خط معادله: څرنګه چې د هایپربولا راسونه د y پر محور باندې پراته دي، نو د موجه خطونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm 1{,}1$$



پوښتنې

د $4x^2-y^2=16$ هایپربولا له معادلې څخه د محراقونو وضعیه کمیات، د راسونو وضعیه کمیات، د موجه خط معادلې او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او په پای کې یې ګراف رسم کړئ.

د هغې هایپربولا معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

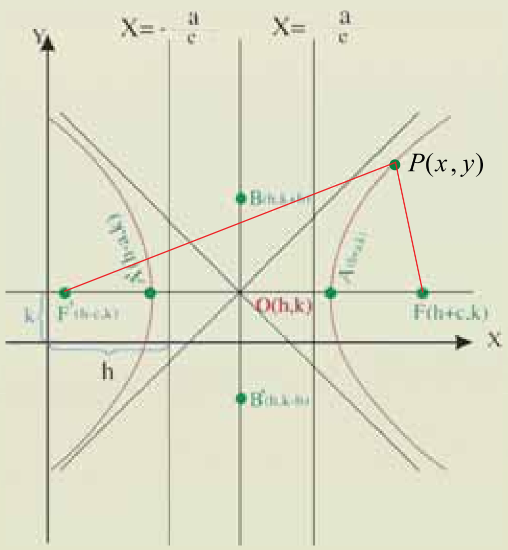
آیا د داسې هایپربولا معادله شته چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبداکې نه وي؟

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په سیستم کې داسې هایپربولا رسم کړئ چې د مرکز مختصات یې (h,k) او متقاطع محور یې موازي د x له محور سره وي.
- په هایپربولا باندې د $p(x,y)$ یو ټکی په پام کې ونیسئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ.
- د هایپربولا د معادلې په پام کې نیولو سره د (h,k) ټکي د محراقونو مختصات یعنې F او F'، د راسونو مختصات یعنې A, A', B او B' په شکل کې وښایاست.



د هایپربولا د تعریف له مخې لیکو:

$$|PF'|-|PF|=2a$$

د دووټکو تر منځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره لیکلای شو:

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}-\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

یا

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

د پورتنې مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$\left(\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{[x-(h+c]^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$[x-(h-c)]^2+(y-k)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h+c)+(h+c)^2$$

د مشابه حدونو له جمعې او تفریق وروسته لیکلای شو: $cx-(ch+a^2)=a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$

بیاهم د مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$\{cx-(ch+a^2)\}^2=\left\{a\sqrt{\{x-(h+c)\}^2+(y-k)^2}\right\}^2$$

$$c^2x^2-2cx(ch+a^2)+(ch+a^2)^2=a^2[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

د ضرب، او طاقتونو له ساده کولو وروسته مشابه حدونه جمع او تفریقوو او پورتني رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$c^2x^2-a^2x^2+2c^2hx+a^2hx+c^2h^2-a^2h^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-2hx(c^2-a^2)+h^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x^2-2hx+h^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې $c^2-a^2=b^2$ دې، نو پورته رابطه په لاندې ډول لیکو: $b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$

دواړه خواوې په a^2b^2 ویشو:

$$\frac{\cancel{b^2}(x-h)^2}{a^2\cancel{b^2}}-\frac{\cancel{a^2}(y-k)^2}{\cancel{a^2}b^2}=\frac{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

د حقیقي راسونو مختصات: $A(h+a,k)\quad A'(h-a,k)$

د غیر حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k+b)\quad B'(h,k-b)$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)\ ,\ F'(h-c,k)$

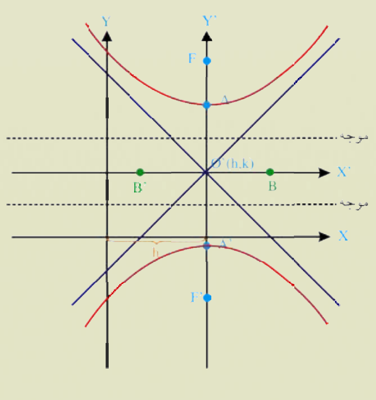
د مجانبونو معادلې: $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$

که چیرې د هایپربولا د مرکز مختصات (h,k) او متقاطع محور یې موازي د y له محور سره وي په دې صورت کې د هایپربولا معادله عبارت ده له: $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

زده کوونکي دې د مرکز مختصات، د محراقونو مختصات، د موجه خط معادله او د مجانبونو معادلې ولیکي؟

دویم حالت: که چیرې محراقونه د y له محور سره موازي پر متقاطع محور پراته وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده، له:

$\frac{(x-h)^2}{b^2}-\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ د شکل له مخې د هایپربولا د رأسونو مختصات، محراقونو مختصات د مؤجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.



یادونه: د هایپربولا غزول شوي معادله له $AX^2+BY^2+DX+EY+F=0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A \neq B$ یا $A=B$ خو مختلف الاشاره وي.

څرنګه کولای شو، د هایپربولا غزول شوي معادله په لاس راوړو؟

لومړي مثال: د $9(x-3)^2-4(y+1)^2=144$ معادلـه پـه پـام کـې ونیـسئ، د مرکـز، د راسـونو، محراقونـو مختصات او همدارنګه د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.

حل: راکړل شوي معادله په معیاري ډول لیکو:

$$\frac{9(x-3)^2}{144}-\frac{4(y+1)^2}{144}=\frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{36}=1$$

د مرکز مختصات: $k=-1, h=3$ یعني $(3,-1)$ دي

د راسونو مختصات: $a^2=16 \Rightarrow a=\pm 4$

$$A(h+a,k)=A(3+4,-1)=A(7,-1)$$

$$A'(h-a,k)=A'(3-4,-1)=A'(-1,-1)$$

او همدارنګه پوهېږو چې:

$$\begin{cases} b^2=36 \Rightarrow b=\pm 6 \\ B(h,k+b)=B(3,6-1)=B(3,5),\ B'(h,k-b)=B'(3,-6-1)=B'(3,-7) \end{cases}$$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)=F(3+\sqrt{52},-1) \quad F'(h-c,k)=F'(3-\sqrt{52},-1)$

پوهېږو چې په هایپربولا کې: $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=16+36=52 \Rightarrow c=\pm\sqrt{52}$

که چیرې متقاطع محور د x له محور سره موازي وي، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h) \ \Rightarrow\ y=\pm\frac{6}{4}(x-3)-1=\pm\frac{3}{2}(x-3)-1$$

$$y=\pm\frac{3}{2}(x-3)-1 \ /\cdot 2$$

$$2y=\pm 3(x-3)-2 \ \Rightarrow\ 2y=3x-9-2 \ \Rightarrow\ 2y-3x+11=0$$

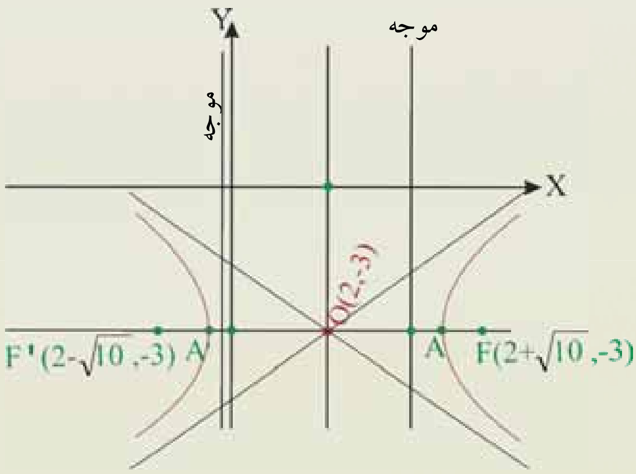
$$2y=-3x+9-2 \ \Rightarrow\ 2y+3x-7=0$$

دویم مثال: د $2x^2-8x-3y^2-18y-31=0$ معادله په پام کې ونیسئ.

د هایپربولا د مرکز مختصات د راسونو مختصات، د محراقونو مختصات او د موجه خطونو معادلې، د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ.

حل:

$$2(x^2-4x)-3(y^2+6y)-31=0$$
$$2\left[(x-2)^2-4\right]-3\left[(y+3)^2-9\right]-31=0$$
$$2(x-2)^2-8-3(y+3)^2+27-31=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2+27-39=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2-12=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2=12$$
$$\frac{2(x-2)^2}{12}-\frac{3(y+3)^2}{12}=\frac{12}{12}$$
$$\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$



پورتني معادله په معياري ډول واړول شوه، ليدل کيږي چې $h=2$ او $k=-3$ دی، د مرکز مختصات يې: $O(2,-3)$

له بلې خوا:

$$b^2=4\Rightarrow b=\pm 2 \quad , \quad a^2=6\Rightarrow a=\pm\sqrt{6}$$
$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow \; c=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{6+4}=\pm\sqrt{10}$$

د محراقونو مختصات: يې $F'(2-\sqrt{10},-3)$, $\quad F(2+\sqrt{10},-3)$,

د راسونو مختصات: $A'(2-\sqrt{6},-3)$, $\quad A(2+\sqrt{6},-3)$,

د موجه خطونو معادلې: $x-h=\pm\frac{a}{e}\Rightarrow x=\pm\frac{a}{e}+h=\pm\frac{6\sqrt{10}}{10}+2$

د مجانبونو معادلې: څرنگه چې متقاطع محور د x له محور سره موازي دی، نو ليکلای شو:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$$
$$y+3=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)$$

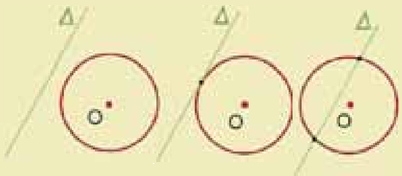
$$y=\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)-3 \;\; /\cdot\sqrt{6}$$
$$\sqrt{6}y=2(x-2)-3\sqrt{6}$$
$$\sqrt{6}y=2x-4-3\sqrt{6} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\sqrt{6}y-2x+4+3\sqrt{6}=0}$$
$$\sqrt{6}y=-2(x-2)-3\sqrt{6} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\sqrt{6}y+2x-4+3\sqrt{6}=0}$$

پوښتنې

د $9x^2-4y^2+54x+16y-79=0$ معادله د هايپربولا پر معياري معادلې بانديې واړوئ.

ديوې کرښې مو قعيت نظرمخروطي مقاطعو ته

يوه اختياري کرښه، يوه دايره د امکان په صورت کې په څو ټکوکې قطع کولای شي؟



فعاليت

د O دايره او د Δ مستقيمه کرښه په پام کې و نيسئ:

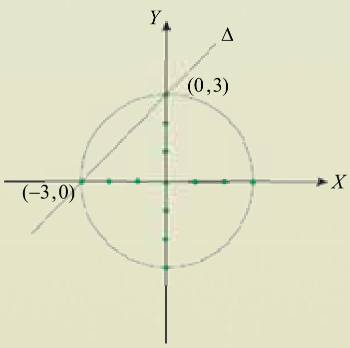
- يوه دايره او مستقيمه کرښه داسې رسم کړئ، چې يوازې يوګډ ټکي سره و لري.
- آيا کيدای شي چې يوه مستقيمه کرښه، يوه دايره له دو وټکو څخه په زياتو ټکوکې قطع کړې؟
- که چيرې د يوې دايرې د مرکز او کرښې تر منځ واټن، د دايرې له شعاع يا ورانګې څخه لوی وي. دايره او کرښه څوګډ ټکي لري؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: په يوه مستوي کې يوه اختياري کرښه او يوه دايره امکان لري، يوازې يوه، دوه او يا هېڅ ګډ ټکي ونلري.

لومړی مثال: د $x^2+y^2=9$ دايره او $y=x+3$ مستقيمه کرښه رسم او موقعيت يې وښاياست.

حل: په شکل کې ليدل کېږي، چې پورتنې دايره او کرښه يو بل په $(0,3)$ او $(-3,0)$ دوو ټکوکې قطع کوي ددې پايلې د لاس راوړلو لپاره که چيرې د y قيمت د دايرې په معادله کې و ضع کړو عين نتيجه په لاس راځي:



$$x^2+y^2=9$$
$$y=x+3 \quad \Rightarrow \quad x^2+(x+3)^2=9$$
$$x^2+x^2+6x+9=9$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2+6x=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad x_2=-3$$

د x قيمتونه د $y=x+3$ په معادله کې ايږدو او د y قيمت په لاس راځي.

$$y_1=0+3 \quad \Rightarrow \quad y_1=3$$
$$y_2=-3+3 \quad \Rightarrow \quad y_2=0$$

د $(0,3)$ او $(-3,0)$ د دايرې او مستقيمې کرښې د تقاطع ټکي دي.

په دې ډول د پورتنیو قیمتونو په پام کې نیولو سره د $(0,3)$ او $(-3,0)$ مرتبې جوړې چې د دواړو معادلو د تقاطع ټکي دي په لاس راځي.

په عمومي ډول کله چې د مستقیمې کرښې له معادلې څخه د x یا y متحول حل او د مخروطي مقاطعو په معادله کې یې کېږدو، د حل لپاره یوه دویمه درجه معادله لاسته راځي چې حل یې د Δ په قیمت پورې اړه لري. دغه مسئله په لاندې ډول د څېړلو،او پام وړ، پایلې لري:

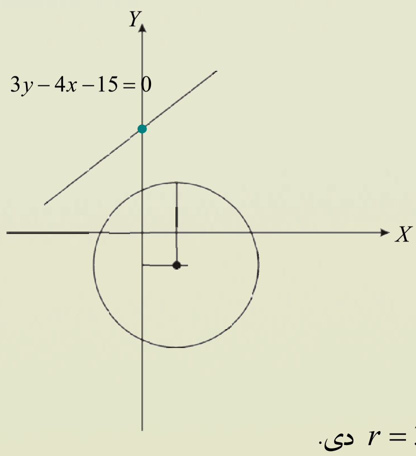
1- که چیرې $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حلونه لري، نو په دې ډول کرښه او منحني یوبل په دوو ټکوکې قطع کوي.

2- که چیرې $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مضاعف یا مساوي جذرونه لري او په دې ډول کرښه د مخروطي مقاطعو له منحني سره یوازې یو ګډ ټکی چې مماس بلل کېږي لري.

3- که چېرې $\Delta < 0$ وي، معادله حل نلري، په بل عبارت،کرښه او منحني یو بل نه قطع کوي.

دویم مثال: د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ دایره او $3y - 4x - 15 = 0$ کرښه په پام کې ونیسئ او موقعیتونه یې له یو بل سره و څیړئ.

حل: دپورتنیو معادلو د بدلولو لپاره چې معیاري حالت ته راوګرځول شي، په لاندې ډول ګام پورته کوو:



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \qquad C(1,-2)$$

له پورتنۍ معادلې څخه پو هېږو چې د دایرې مرکز $C(1,-2)$ او شعاع یې $r = 3$ دی.

همدغه راز د مستقیمې کرښې لپاره لرو: $3y = 4x + 15 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 5$

که چیرې له پورتني معادلې څخه د y قیمت د دایرې په معادله کې کېږدو او معادله حل کړو، نو لاندې پایله په لاس راځي.

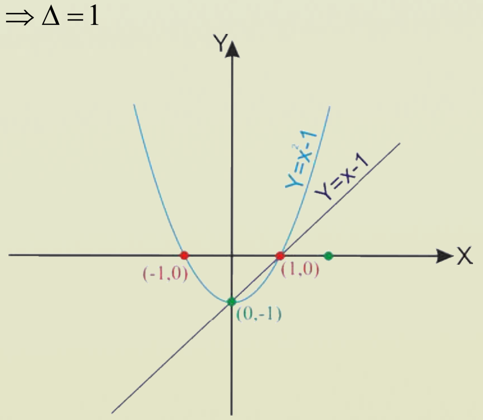
$$(x-1)^2+(\frac{4}{3}x+5+2)^2=9$$
$$\Rightarrow x^2-2x+1+(\frac{4}{3}x+7)^2=9 \Rightarrow x^2-2x+1+\frac{16}{9}x^2+14\frac{4}{3}x+49-9=0$$
$$\Rightarrow 9\cdot\frac{25}{9}x^2-9\cdot\frac{50}{3}x+9\cdot 40=0$$
$$\Rightarrow 25x^2+150x+360=0$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=22500-36000=-13500 \quad , \quad \Delta<0$$

څرنګه چې $\Delta<0$ ده، کرښه او دایره ګډټکی نه لري.

دریم مثال: د $y=x-1$ د کرښې موقعیت د $y-x^2+1=0$ پارابولا ته وخیرئ.

حل: د پورتني مسئلې د خیړلو لپاره د y قیمت د پارابول په معادله کې وضع کوو، او بیاګام په ګام د معادلې حل په پام کې نیسو:

$$y=x-1$$
$$y-x^2+1=0 \Rightarrow (x-1)-x^2+1=0$$
$$\Rightarrow x-1-x^2+1=0 \Rightarrow x^2-x=0$$
$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(-1)-4(1)(0) \Rightarrow 1-0$$
$$\Rightarrow \Delta=1$$



څرنګه چې لیدل کیږي $\Delta=1>0$ څخه ده، نو موږ کرښه یعنې $y=x-1$ په لاندې ډول په لاس راځي او د $y-x^2+1=0$ پارابول یو بل په دوو ټکو کې قطع کوي چې د دې دویمې درجې معادلې حل

$$x^2-x=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1}}{2}$$
$$x_1=1 \quad , \quad x_2=0$$

که چیرې په لاس راغلي قیمتونه د کرښې په معادله کې کیږدو، نو د نوموړي کرښې او پارابولا د قطع کولو ټکي په لاس راځي، هغه عبارت دي له : $(0,-1)$, $(1,0)$

دغه ټکي په ګراف کې هم په ښکاره ډول لیدل کیږي.

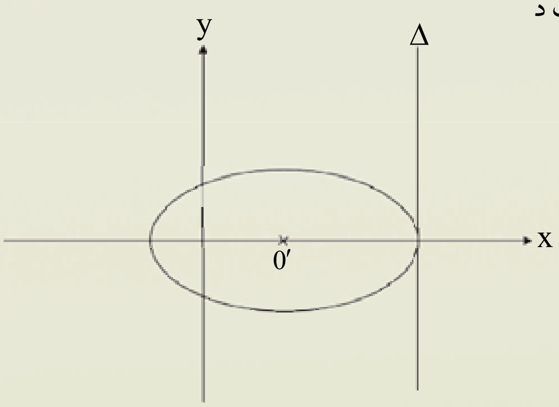
څلورم مثال: د $x=5$ د مستقیمې کرښې او $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ بیضوي موقعیتونه وڅیړئ.

حل: که چیرې د $x=5$ دمستقیمې کرښې قیمت د بیضوي په معادله کې کښېږدو، نو په لاس راځي:

$$\frac{(5-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{9}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4}=1-1 \Rightarrow y^2=0$$

څرنګه چې: $\Delta=b^2-4ac=0$



په دې ډول ویلای شو چې مستقیمه کرښه اوبیضوي یو ګډټکی لري چې په شکل کې په ښکاره ډول لیدل کیږي.

یادونه: د مخروطي مقاطعو غزیدلی یا انکشاف ورکړل شوي، معادله په لاندې ډول ده:

$$A,B,D,E,F\in IR \quad ,Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

د پورتني معادلې د پیژندلو لپاره په یاد ولرئ چې:

1- که چیرې $A=B$ یو شان علامې ولري، یوه دایره ده.

2- که چیرې $A\neq B$ او یو شان علامې ولري، یو الپس دی.

3- که چیرې $A\neq B$ یا $A=B$ او مختلفې علامې ولري، هایپربولا ده.

4- که چیرې معادلې لاندې شکل ولري، ګراف یې یوه پارابولا ده.

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0 \text{ او } Ay^2+By+Cx+D=0$$

پوښتنې

1- لاندې معادلې د هغوی د ګرافونو د منحنی له مخې و ټاکئ.

$a)\ y^2-2y+x+3=0$ $\qquad b)\ 9x^2+9y^2=27$

$c)\ 25x^2+16y^2=400$ $\qquad d)\ x^2-y^2=0$

$e)\ y^2+6y-x+2=0$

2- د $9x^2+4y^2=36$ الپس او $y=3$ مستقیم خط یو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

3- د $y=x$ خط او $x^2-2y^2=4$ هایپربول د تقاطع ټکي پیداکړئ.

د خپرکي مهم ټکي

مخروطي مقاطع: د یوې مستوي او مخروط د تقاطع ګډ فصل عبارت ده له: دایرې، پارابول،هایپربولا، یو ټکی، بیضوي او یا دوه متقاطع کرښې.

بیضوي: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو مستقرو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل یې یو ثابت اوږدوالی وي، بیضوي بلل کیږي ، مستقر ټکي چې په F' او F تورو ښودل شوي، د بیضوي محراقونه او $AA'=2a$ ثابت او ږدوالی دی

شمیره	معادلې	د مرکز وضیعه کمیات	د اوږده قطر انجامونه	دلنډ قطر انجامونه	محراقونه
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$	$(0,0)$	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې دي	$(c,0),(-c,0)$ د x پر محور باندې دي
2	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $a>b$	$(0,0)$	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور باندې دي	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,c),(0,-c)$ د y پر محور باندې دي
3	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $a>b$	(h,k)	$(h\pm a,k)$ قطر د x له محور سره موازي دي	$(h,k\pm b)$ قطر د y له محور سره موازي دي	$(h\pm c,k)$ د x پر محور باندې دی
4	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ $a>b$	(h,k)	$(h,k\pm a)$ قطر د y له محور سره موازي دی	$(h\pm b,k)$ قطر د x له محور سره موازی دی	$(h,k\pm c)$ د y پر محور باندې دي

د بیضوي غزول شوي عمومي معادله عبارت ده له: $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$

په داسې حال کې چې $A>0$ او $C>0$ وي: (یعنې دواړه هم علامه وي).

$e=\frac{c}{a}$ دبیضوي دعن المرکز یت په نامه یادیږي.

پارابولا: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقر ټکي او ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کیږي، دغه ثابت یا مستقر ټکي ته د پاراپولا محراق (F) او ثابت مستقیم خط ته د پارابولا ها دي(موجه) وایې، معادله یې $y^2=4px$ ده

تناظري محور	د موجه خط معادله	د محراق مختصات	دراس وضعیه کمیات	د پارابولا معادلې	شمېره
$x=0$	$x=-p$	$F(P,0)$	$S(0,0)$	$y^2=4Px$	1
$y=0$	$y=-p$	$F(0,P)$	$S(0,0)$	$x^2=4Py$	2
$y=k$	$x=h-p$	$F(h+p,k)$	$S(h,k)$	$(y-k)^2=4P(x-h)$	3
$x=h$	$y=k-p$	$F(h,k+p)$	$S(h,k)$	$(x-h)^2=4P(y-k)$	4

د پارابولا غزول شوي معادله $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ په داسې حال کې چې $A=0$ یا $C=0$ وي، نه دواړه. ($C\neq 0, A=0$ یا $C=0, A\neq 0$ وي) په پارابولا کې $e=1$ دی.

هایپربولا: په یوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ثابتو مستقرو ټکو څخه تل ثابت اوږدوالی ولري، هایپربولا بلل کیږي.

دوه ثابت مستقر ټکي د هایپربولا محراقونه دي، د دواړو محراقونو ترمنځ فاصله $2c$ ده.

د هایپربولا معادله $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ د هایپربولا محراقونه پر افقي محور پراته دي).

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ د هایپربولا محراقونه پر عمودي محور پراته دي).

محراقونه	غیر حقیقي رأسونه	د رأسونو وضعیه کمیات	د مرکز وضعیه کمیات	د هایپربولا معادلې
$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ د x پر محور باندې	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$F(0,\pm c)$ د y پر محور باندې	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
$F(h\pm c,k)$	$B(h,k\pm b)$	$A(h\pm a,k)$	$S(h,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
$F(h,k\pm c)$	$B(h\pm b,k)$	$A(h,k\pm a)$	$S(h,k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

د مجانبونو معادلې	د موجه خطونو معادلې
$y=\pm\frac{b}{a}x$	$x=\pm\frac{a}{c}$
$y=\pm\frac{a}{b}x$	$y=\pm\frac{a}{c}$
$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$x=h\pm\frac{a}{c}$
$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$	$y=k\pm\frac{a}{c}$

هایپربولا عمومي غزول شوې معادله: $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A=B$ یا $A\neq B$، خو مختلف الاشاره وي، عن المرکزیت $e>1$ دی.

د څپرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه او کرښه ترې تا وکړئ.

1- که چیرې یوه مستوي یو مخروط په مایل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط ګډ فصل عبارت دی له:

a) بیضوي b) دایره c) هایپربولا d) دوه متقاطع خطونه

2- د الپس محراقونه هغه ټکي دي چې د الپس له مرکز څخه:

a) برابر و اټن ولري b) مختلف و اټنونه لري

c) د اوږد قطر نیمايي واټن لري d) د لنډ قطر نیمايي ده.

3- که چیرې M د الپس یو ټکی F او F' محراقونه او $2a$ داوږده قطر اوږ دوالې وي، نو په دې صورت کې لرو چې:

a) $|MF|-|MF'|=2a$ b) $|MF|+|MF'|=a$

c) $|MF|+|MF'|=2a$ d) $|MF'|+|MF|=0$

4- د الپس عن المرکزیت له لاندې کومې یوې رابطې څخه په لاس راځي:

a): $e=\frac{a}{c}$ b): $e=\frac{c}{a}$ c): $e=\frac{b}{c}$ d): $e=\frac{c}{b}$

5- د لنډ قطر او محراقونو ترمنځ اړیکه عبارت ده له:

a) $a^2=b^2-e^2$ b) $a^2+b^2=c^2$

c) $a^2=b^2+e^2$ d) $a^2=b^2+c^2$

6- د $(y-k)^2=4p(x-h)$ په معادله کې $p>0$ سره وي، نو:

a) د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده. b) دپارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

c) دپارابولا خوله ښي خواته خلاص ده d) دپارابولا خوله کیڼې خواته خلاص ده.

7- د $(x+1)^2=8(y-2)$ یو پارابولا معادله په پام کې ونیسئ. دمحراق وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

a) $F(-1,-2)$ b) $F(-1,4)$ c) $F(-1,2)$ d) $F(-4,-1)$

8- که چیرې F او F' د هایپربولا محراقونه وي، د p ټکي په کوم شرط د هایپربولا د محیط یو ټکی کیدلای شي؟

a) $|PF|+|PF'|=2a$ b) $|PF|-|PF'|=a$

c) $|PF|-|PF'|=2a$ d) $|PF|-|PF'|=0$

9: د $y = x^2$ د پارابولا گراف متناظر دی نظر:

a) د y محور ته　　b) د x محور ته

c) د x او y محورونو ته　　c) د وضعیه کمیاتو مبدأ ته

10: په لاندې ځوابونو کې کوم یو د هایپربولا عن المرکزیت ښیي؟

a) $e<1$　　b) $e=1$　　c) $e>1$　　d) $e=-1$

11: د $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ د بیضوي د اوږد قطر موقعیت:

a) د y پر محور باندې دی.　　b) د x پر محور باندې دی.

c) د x پر محور عمود دی.　　d) د y له محور سره موازي دی.

12: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکی څخه مساوي فاصلې لري. د څه په نامه یادېږي؟

a) کره　　b) دایره　　c) پارابولا　　d) بیضوي

13: د $y^2=-4(x+2)$ پارابول دراس مختصات عبارت دي له:

a) $(2,4)$　　b) $(4,2)$　　c) $(2,0)$　　d) $(-2,0)$

14: د $4x^2+4y^2+8y+3=0$ معادله عبارت ده له:

a) دایرې　　b) بیضوي　　c) پارابولا　　d) هایپربولا

15: د $y=2x$ مستقیم خط د $\frac{(x-1)^2}{4}-(\frac{(y-2)^2}{9}=1$ هایپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

16: د $2y=3x$ مستقیم خط د $2y^2-6y+5x-12=0$ منحني په څو ټکو کې قطع کوي؟

17: لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا یې گرافونه رسم کړئ.

$a)\ x^2+4y^2=4$　　$b)\ 9x^2+2y^2=15$

$c)\ 16x^2-96x+9y^2+90y+225=0$　　$d)\ x^2+12x-120y+288=0$

18: د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

a) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $a=-2$ ، $e=0,75$ دي او لوی قطر یې د y پر محور باندې پروت دی.

b) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $b=64$ $e=0,5$ دي او لوی قطر یې د x پر محور باندې پروت دی.

19: له لاندې معادلو څخه د بیضوي ټول اجزاوې پیدا کړئ.

a) $4(x-1)^2+y^2=4$　　b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

20: د پارابولا لاندې معادلې لومړي په معياري شکل وليکئ او بياېې ګرافونه رسم کړئ.

a) $x^2 - 11y = 0$

b) $y^2 - 4y - 4x + 2 = 0$

21: د پارابولا لاندې هره يوه معادله په معياري ډول واړوئ:

a) $4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0$

b) $2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0$

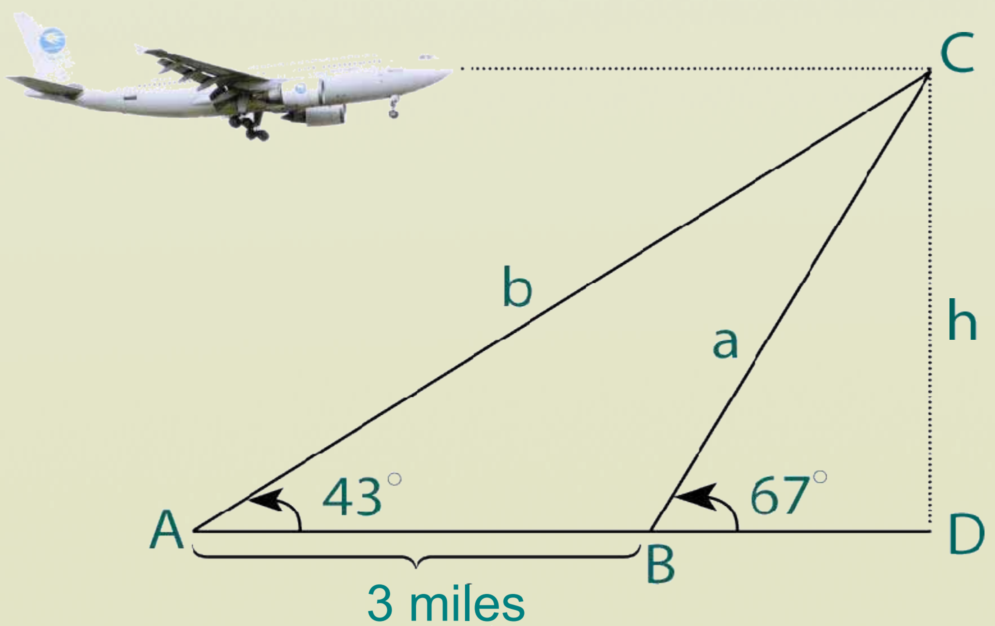
22: د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې $(-4,0)$ او $(4,0)$ د راسونو مختصات او $y = \pm\frac{5}{4}x$ د مجانبونو معادلې وي.

23: د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې $(-1,3)$ ، $(1,3)$ د راسونو مختصات او محراقي اوږدوالى يې 4 واحده وي.

24: د $y = 2x$ مستقيم خط د $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ هايپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

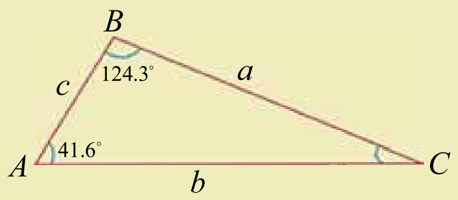
دویم څپرکی

مثلثات


C
b
a
h
43°
67°
A
B
D
3 miles

د ساین قانون

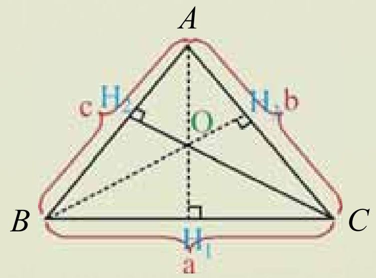
Law of sine



خرنګه کولای شو په مخامخ شکل کې د a د ضلعې او C زاوېې اندازه پیدا کړو؟

فعالیت

- د ABC یو حادهالزاویه مثلث رسم او د ضلعو اوږدوالی یې وټاکئ.
- د مثلث له هر رأس څخه د هغې پرمخامخ ضلعې د($\overline{AH_1}$, $\overline{BH_3}$, $\overline{CH_2}$) ارتفاعګانې رسم کړئ.
- د ABH_1 او BCH_1 په قایمالزاویه مثلثونو کې د ($\overline{AH_1}$) ارتفاع د $\sin B$ او $\sin C$ له جنسه پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.
- د ABH_3 او ACH_2 پــه قــایمالزاویــه مثلثونــو کــې د ($\overline{BH_3}$) ارتفاع د $\sin A$ او $\sin C$ له جنسه پیدا او یو لـه بله سره یې پرتله کړئ.



له پورتني فعالیت څخه لاندې ثبوت په لاس راوړای شو.

ثبوت:

د ACH_1 او BAH_1 په قایمالزاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\sin B = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH_1}}{c}$$

$$\overline{AH_1} = c\sin B \quad .... \quad (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH_1}}{b}$$

$$\overline{AH_1} = b\sin C \quad .... \quad (2)$$

د (1) او (2) اړیکو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

$$c\sin B = b\sin C \,/ \div bc$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad .... \quad \mathrm{I}$$

په همدې ډول د ABH_3 او BCH_3 په قایم‌الزاویه مثلثونو کې لیکلی شو چې:

$$\sin A = \frac{\overline{BH_3}}{c} \Rightarrow \overline{BH_3} = c\sin A \;......... (3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH_3}}{a} \Rightarrow \overline{BH_3} = a\sin C \;......... (4)$$

د (3) او (4) اړیکې له پرتلې څخه لرو چې: $c\sin A = a\sin C / \div ac$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \;.......... \text{II}$$

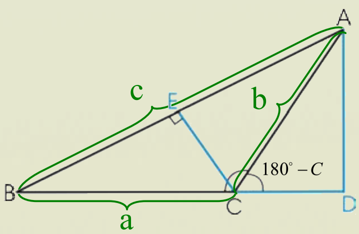
د I او II اړیکې له پرتلې څخه لیکلی شو چې: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

پایله: په هر $A\overset{\Delta}{B}C$ کې په داسې حال کې چې A, B, C زاویې او a, b, c د ضلعو اوږدوالی وي، لرو:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

پورتنۍ اړیکه(رابطه) په یوه مثلث کې د ساین د قانون(Law of sine) په نامه یادیږي.

د ساین د قضیې ثبوت په منفرج الزاویه مثلث کې:



د ABC په مثلث کې چې د C زاویه یې منفرجه ده

په پام کې نیسو د $\overline{AD}$ او $\overline{CE}$ ارتفاع ګانې رسموو.

د ADC په قایم الزاویه مثلث کې لرو: $\sin(180^\circ - C) = \frac{\overline{AD}}{b}$

د بلې خوا د متممو زاویو څخه پوهیږو چې: $\sin(180^\circ - C) = \sin C$

نو: $\sin C = \frac{\overline{AD}}{b} \;......(I)$

همدارنګه د ADB له قایم الزاویه مثلث څخه لرو چې: $\sin B = \frac{\overline{AD}}{c} \;......(2)$

اوس (1) او (2) رابطې خوا په خوا یو پربل وېشو:

نو: $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b} \longrightarrow$ یا $\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}$ ....(1)

اوس د ACE په قایم الزاویه مثلث کې لیکلی شو:

$$\sin A = \frac{\overline{CE}}{b} .....(3)$$

د BEC په مثلث کې:

$$\sin B = \frac{\overline{CE}}{a} .....(4)$$

پورته 3 او 4 رابطې خوا په خوا يو پر بل وېشو او لیکو:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

یا

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} ......(5)$$

اوس د I او II رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

فعالیت

- زده‌کوونکي دې، د ساین قانون په قایم‌الزاویه مثلث کې وڅېړي او ثبوت دې کړي.

لومړی مثال: که چیرې د ABC په مثلث کې د $B = 60^\circ$, $b = 9cm$ او $c = 6\sqrt{3}\,cm$ وي، د یوې ضلعې او دوو زاویو اندازې یې پیدا کړئ؟

حل: د ساین د قضیې یا قانون له مخې لیکلی شو چې:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ}{9} = \frac{6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C = \frac{3\cdot 3}{9} = \frac{\cancel{9}}{\cancel{9}} = 1 \Rightarrow \sin C = 1$$

څرنګه چې: $\sin 90^\circ = 1$ دی، نو: $C = 90^\circ$

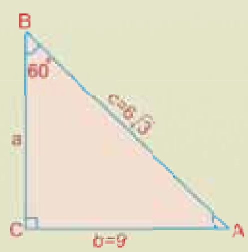
همدارنګه پوهېږو چې په یوه مثلث کې:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$A + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$A = 180^\circ - 150^\circ$$

$$A = 30^\circ$$



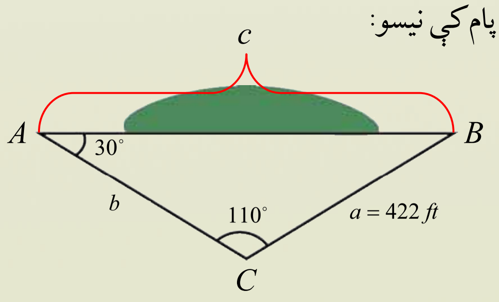
د a ضلعي قيمت په لاندې ډول پيدا کولی شو :

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \Rightarrow a=\frac{\sin A \cdot b}{\sin B} \Rightarrow a=\frac{\sin 30^\circ \cdot 9}{\sin 60^\circ}$$

$$a=\frac{\frac{1}{2}\cdot 9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow a=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$$

$$a=3\sqrt{3}\,cm$$

دويم مثال: يو ساختماني انجينر غواړي چې د دوو ټکو تر منځ واټن چې په منځ کې يې يوه غونډۍ پرته ده پيدا کړي.



حل: د ساين د قانون په کارولو سره $\sin A$ او $\sin C$ په پام کې نيسو:

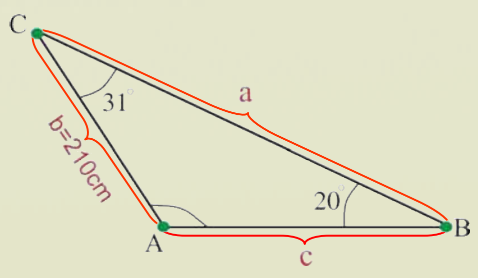
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{422\,ft\cdot\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

څرنګه چې: $\sin 110^\circ=0.9396$ او $\sin 30^\circ=0.5$ دی.

نو: $c=\frac{422\,ft\cdot 0.9396}{0.5} \Rightarrow c=793.0224\,ft$

دريم مثال: په مخامخ شکل کې د دوو زاويو او يوې ضلعې اندازه راکړل شوې ده، د يوې نامعلومې زاويې او دوو ضلعو اندازه پيدا کړئ.



حل: پوهېږو چې د يوه مثلث د داخلي زاويو مجموعه 180° ده؛ نو نامعلومې زاويې يې داسې پيدا کولی شو:

$$A=180^\circ-(31^\circ+20^\circ)=180^\circ-51^\circ$$

$$A=129^\circ$$

د a دپیداکولو لپاره لاند تناسب په پام کې نیسو:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin 129^\circ}{a}=\frac{\sin 20^\circ}{210}$$
$$a=\frac{\sin 129^\circ \cdot 210cm}{\sin 20^\circ}$$

څرنگه چې $\sin 20^\circ = 0.342$ او $\sin 129^\circ = 0.7771$ دي؛ نو:

$$a=\frac{0.7771\cdot 210}{0.342}=\frac{163.191}{0.342}=477.166cm$$
$$a=477.166cm$$

اوس د c ضلعې اوږدوالی د $\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}$ له رابطې څخه پیدا کوو:

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{210}=\frac{\sin 31^\circ}{c}$$
$$c=\frac{210cm\cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ}$$

څرنگه چې $\sin 31^\circ = 0.5150$ او $\sin 20^\circ = 0.342$ دی د پورته قیمتونو په اېښودلو سره لیکلای شو چې:

$$c=\frac{0.5150\cdot 210}{0.342}=\frac{108.15}{0.342}=316.2$$

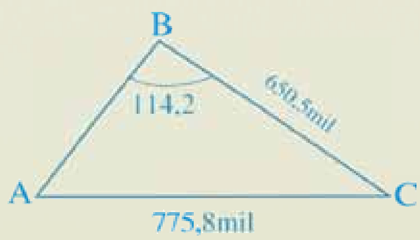
یادونه:

د ساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

- دوې زاویې او دمنځ ضلع یې معلومه وي.(ASA)، A زاویه او S ضلع ښیې.
- دوه ضلعې او د منځ زاویه یې معلومه وي.(SAS)، S ضلع او A زاویه ښیې.

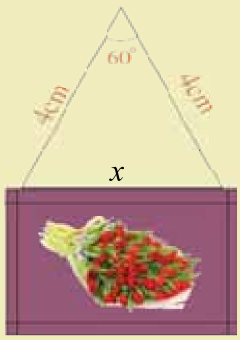
پوښتنې

1. که چیرې د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a = 8$ ، $b = 5$ او $c = 10$ واحده وي، د B د زاویې انـدازه پیدا کړئ.
2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ د A او B د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟



د کوساین قانون

Law of cosine



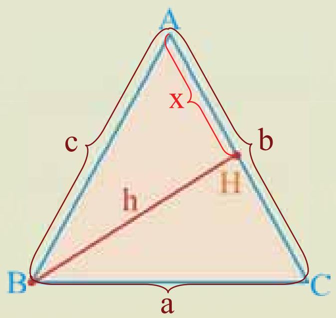
د یوه شکل چارت د مېخ په مرسته د دېوال پـر مـخ ځـړول شوی دی، که چیرې د مېخ د دوو خواوو د تار اوږدوالی هر یو $4cm$ وي او د مـنځ زاویـه یـې 60° وي، د (x) تـار د دوو ټکو ترمنځ واټن د کوم قانون په مرسته پیدا کولی شو؟

فعالیت

- د ABC کیفي مثلث رسم او د هر رأس مخامخ ضلعې په ترتیب سره په c, b, a وښایاست.
- د B له رأس څخه د $\overline{AC}$ پر ضلع ارتفاع رسم کړئ.
- په جوړ شوو قایم‌الزاویه مثلثونو کې د فیثاغورث قضیه تطبیق کړئ.
- په قایم‌الزاویه مثلثونو کې د $\overline{BH}$ او $\overline{HC}$ قیمتونه د B او C زاویو د cos له جنسه، پـه ترتیـب سـره پیدا او د فیثاغورث په رابطه کې یې وضع کړئ.
- ممکنه الجبري محاسبې ترسره او وروستی رابطه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت د سرته رسولو څخه وروسته داسې ثبوتوو:

ثبوت: د ABC په حاده‌الزاویه مثلث کې د $\overline{BH}$ ارتفـاع رسـموو



$$\overline{BH} = h \quad , \quad \overline{AH} = x \quad , \quad \overline{CH} = b - x$$

د BCH په قایم الزاویه مثلث کې لرو:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$a^2 = (b-x)^2 + h^2 \quad .... \quad \mathrm{I}$$

د AHB په قایم الزاویه مثلث کې د h اوږدوالي پیداکوو:

$$h^2 = c^2 - x^2 \quad .... \quad \mathrm{II}$$

د I او II له اړیکو څخه لیکلی شو چې:

$$a^2 = (b-x)^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

د AHB په قایم‌الزاویه مثلث کې:

$$coA = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos A$$

په پورتنی اړیکه کې د x پر ځای $c \cdot \cos A$ قیمت اېږدو، نو:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{یا} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

پایله: په هر مثلث کې دا لاندې اړیکې سمې دي:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{یا} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{یا} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{یا} \quad c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$

فعالیت

- په همدې مثلث کې دې دوې نورې اړیکې یعنې $\sin C$ او $\sin B$ زده‌کوونکې ثبوت کړي.

یادونه: د کوساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

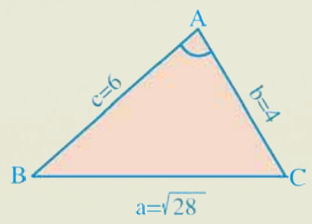
- چې دوې ضلعې او د منځ زاویې یې معلومې وي. (SAS)، S ضلع او A زاویه ښیي.
- د مثلث درې ضلعې معلومې وي. (SSS)، S یوه ضلع ښیي .

د ساین او کوساین د قانون له کارولو څخه، د مثلث د عناصرو د پیداکولو لپاره له لاندې جدول څخه کار اخلو:

د یوه مثلث د عناصرو پیدا کول	
د کارولو فورمول	راکړل شوی معلومات
د کوساین او وروسته د ساین قانون	(SSS) ضلع، ضلع، ضع
د ساین قانون	SAA (زاویه، زاویه، ضلع)
د ساین قانون	ASA (زاویه، ضلع، زاویه)
د کوساین قانون وروسته د ساین	SAS (ضلع،زاویه، ضلع)
امکان نه لري	AAA (زاویه، زاویه، زاویه)

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې د هغو دریو ضلعو اندازې په لاندې ډول راکړل شوي دي، د A زاویې اندازه وټاکئ.

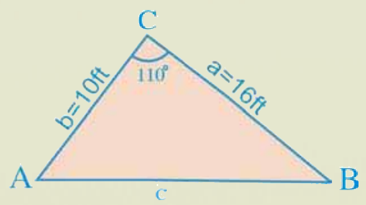
حل:



$$a=\sqrt{28}\ \ ,\ \ b=4\ \ ,\ \ c=6\ \ ,\ \ A=?$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$
$$(\sqrt{28})^2=(4)^2+(6)^2-2\cdot4\cdot6\cos A$$
$$28=16+36-48\cos A\ \ \Rightarrow\ 28=52-48\cos A$$
$$48\cos A=52-28\ \ \Rightarrow\ 48\cos A=24$$
$$\cos A=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$$
$$\boxed{A=60^\circ}$$

دویم مثال: د ABC په مثلث کې که چیرې دوې ضلعې یې هر یوه $a=16$, $b=10$ واحده او د منځ زاویه یې $C=110^\circ$ وي، د c ضلعې اوږدوالی پیدا کړئ.

حل:



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$c^2=(16)^2+(10)^2-2(16)10\cos110^\circ$$
$$c^2=256+100-320\cos110^\circ$$
$$c^2=356-320\cos110^\circ$$
$$c=\sqrt{356-320\cos110^\circ}$$

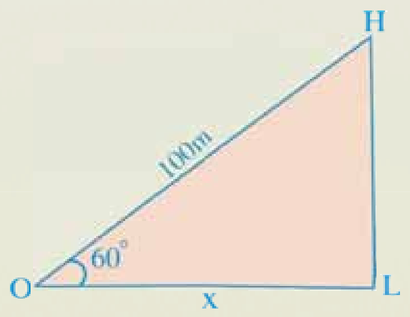
څرنګه چې : $\cos110^\circ=0.342$ دی، نو:

$$c=\sqrt{356-320(0.342)}\ \ \Rightarrow\ c=\sqrt{356-109.44}$$
$$\boxed{c=15.70}$$

دریم مثال: یو پتنګ(کاغذ پران) له $100m$ واټن تار سره په هوا کې دی، که تار د ځمکې له سطحې سره 60° زاویه جوړه کړې وي، له ځمکې څخه د پتنګ لوړوالی پیدا کړئ.

حل: د OHL په قایم‌الزاویه مثلث کې لرو، چې:

$$\cos60^\circ=\frac{\overline{OL}}{\overline{OH}}=\frac{x}{100}\ \ \Rightarrow\ x=100\cdot\cos60^\circ=100\cdot\frac{1}{2}=50m$$



د کوساین قانون له مخې لرو چې:

$$\overline{HL}^2=\overline{OH}^2+\overline{OL}^2-2\overline{OH}\cdot\overline{OL}\cdot\cos 60^\circ$$

$$\overline{HL}^2=(100)^2+(50)^2-2\cdot 100\cdot 50\cdot\frac{1}{2}$$

$$\overline{HL}^2=10000+2500-5000$$

$$\overline{HL}^2=7500m^2 \quad\Rightarrow \overline{HL}=\sqrt{7500}m=50\sqrt{3}\,m$$

$$\overline{HL}=86.6m$$

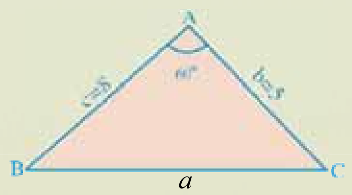
څلورم مثال: که چیرې د ABC په مثلث کې $b=5,\ c=8\ ,\ A=60^\circ$ وي، د a او $\sin C$ اندازه پیدا کړئ.

حل: لومړی د کوساین د قضیې په کارلوسره د a ضلع او بیا $\sin C$ پیداکوو.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad\Rightarrow\quad a^2=25+64-80\cdot\frac{1}{2}=89-40$$

$$a^2=49 \quad\Rightarrow\quad a=7$$

د ساین د قضیې له مخې لیکو چې:



$$\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin A}{a}$$

$$\sin C=\frac{c\cdot\sin A}{a}=\frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$

$$\sin C=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

پوښتنې

1. که چیرې د ABC په مثلث کې $b=4ft,\ a=5ft$ او $A=45^\circ$ وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او زاویې پیدا کړئ.
2. که چیرې په یوه مثلث کې $a=3cm$ او $b=9cm$ او د دوی ترمنځ زاویه 60° وي د c د ضلعې اوږدوالی پیدا کړئ؟

د ټانجنټ قانون

Law of tangent

په هر مثلث کې د زاویو او ضلعو ترمنځ د tan له جنسه مخامخ اړیکه شتون لري.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- د ساین قانون مساوي په D ولیکئ.
- د sin قانون هر دوه، نسبتونه یعني $\frac{b}{\sin B}$ او $\frac{a}{\sin A}$ په جلا جلا ډول مساوي له D سره ولیکئ.
- پورته دوه نسبتونه د ضلعو د اوږدوالي له مخې ولیکئ.
- دوه پورتنی اړیکې لومړی جمع او بیا یې تفریق کړئ.
- لاسته راغلي اړیکې یو پر بل وویشئ.
- الجبري محاسبې ترسره او د پایلې فورمول ولیکئ.

پورته فعالیت په لاندې ډول ثبوتوو.

ثبوت: د ساین قانون په پام کې نیسو:

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=D$$

$$\frac{b}{\sin B}=D \Rightarrow b=D\sin B \quad , \quad \frac{a}{\sin A}=D \Rightarrow a=D\sin A$$

پورتنی اړیکې لومړی جمع او بیا تفریقوو:

$$a+b=D(\sin A+\sin B)$$
$$a-b=D(\sin A-\sin B)$$

پورتنی اړیکې یو پر بل وېشو:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cdot\cot\frac{A-B}{2}$$

څرنګه چې $\dfrac{1}{\tan\frac{A-B}{2}}=\cot\dfrac{A-B}{2}$ دی.

نو په پایله کې لیکلی شو چې:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- لاندې اړیکې پیداکړئ.

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}\quad,\quad\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}$$

- پورتنی اړیکې په یوه مثلث کې د ضلعې او زاویې ترمنځ اړیکې د tan اړیکه بلل کېږي.

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې $\dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ او $A=90^\circ$ دی، د B او C زاویو اندازه پیداکړئ.

حل: پوهېږو چې په هر مثلث کې:

$$A+B+C=180^\circ$$

$$B+C=180^\circ-90^\circ$$

$$B+C=90^\circ\ \Rightarrow\ \frac{B+C}{2}=45^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ A=90^\circ\\ B=?\\ C=?\end{array}\right\}\ \frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ}$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan30^\circ\quad,\quad\tan\frac{B-C}{2}=\tan30^\circ$$

$$\frac{B-C}{2}=30^\circ\ \Rightarrow\ B-C=60^\circ\ \ ....\ \mathrm{I}$$

$$A+B+C=180^\circ$$

له بلې خوا په هر مثلث کې:

$$B+C=180^\circ-A\ \Rightarrow\ B+C=180^\circ-90^\circ$$

$$B+C=90^\circ\ \ ....\ \mathrm{II}$$

له I او II اړیکو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د نوموړي سیستم له حلولو څخه وروسته د B قیمت په لاس راوړو:

$$B-C=60^\circ \quad \ldots\ldots\ldots \; \mathrm{I}$$
$$B+C=90^\circ \quad \ldots\ldots\ldots \; \mathrm{II}$$
$$2B=150^\circ$$
$$\boxed{B=75^\circ}$$

اوس د B قیمت په ایښودلو سره د C زاویه پیداکوو:

$$B-C=60^\circ$$
$$75^\circ-C=60^\circ$$
$$-C=60^\circ-75^\circ$$
$$\boxed{C=15^\circ}$$

دویم مثال: که چیرې د ABC په یوه مثلث کې $c=432$, $B=42^\circ\ 30'$ او $a=925$ وي، د مثلث نورې اجزاوې پیدا کړئ.

حل:

$$A+B+C=180^\circ \Rightarrow A+C=180^\circ-B \Rightarrow A+C=180^\circ-42^\circ\ 30'$$
$$A+C=179^\circ\ 60'-42^\circ\ 30' \Rightarrow A+C=137^\circ\ 30' \quad \ldots\ldots\ldots \; \mathrm{I}$$
$$\frac{A+C}{2}=\frac{137^\circ\ 30'}{2} \Rightarrow \frac{A+C}{2}=\frac{136^\circ\ 90'}{2}=68^\circ\ 45'$$
$$\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{a+c}{a-c}$$

اوس د زاویې او ضلعو قیمتونه په پورتنی اړیکه کې ایږدو، یعنې:

$$\frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{925+432}{925-432} \Rightarrow \frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{1357}{493}$$

یا:

$$1357\cdot\tan\frac{A-C}{2}=493\cdot\tan 68^\circ\ 45' \Rightarrow \tan\frac{A-C}{2}=\frac{493}{1357}\cdot\tan 68^\circ\ 45'$$

له مثلثاتي جدول څخه پوهېږو چې $\tan 68^\circ\ 45' = 2.5714$ دی؛ نو:

$$\tan\frac{A-C}{2} = 0.9341 \qquad \Rightarrow \frac{A-C}{2} = 42^\circ\ 59'$$

$$\boxed{A - C = 85^\circ\ 58' \ \ldots\ldots\ \mathrm{II}}$$

اوس د I او II اړیکو په پام کې نیولو سره لیکو:

$$A + C = 137^\circ\ 30' \ \ldots\ldots\ \mathrm{I}$$

$$A - C = 85^\circ\ 58' \ \ldots\ldots\ \mathrm{II}$$

$$2A = 222^\circ\ 88'$$

$$\boxed{A = 111^\circ\ 44'}$$

$$C = 137^\circ\ 30' - A \ \Rightarrow\ C = 137^\circ\ 30' - 111^\circ\ 44'$$

$$C = 136^\circ\ 90' - 111^\circ\ 44'$$

$$\boxed{C = 25^\circ\ 46'}$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \ \Rightarrow\ b = c\cdot\frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = \frac{432 \sin 42^\circ\ 30'}{\sin 25^\circ\ 46'}$$

$$\sin 42^\circ\ 30' = 0.6756$$

$$\sin 25^\circ\ 46' = 0.4346$$

$$b = \frac{432}{0.4346}\cdot 0.6756 = 994.01\cdot 0.6756 = 671.5582cm$$

پوښتني

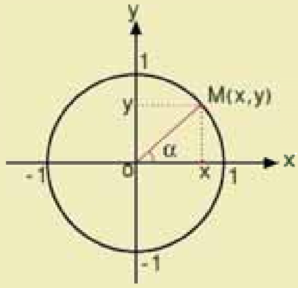
د لاندې ورکړل شوو عناصرو له مخې د مثلث نامعلومې اجزاوې پیدا کړئ.

a) که چیرې $C = 75^\circ$, $B = 60^\circ$, $a = 35ft$ وي.

b) که چیرې $\alpha = 45^\circ$, $b = 37m$ او $\gamma = 75^\circ$ وي.

مثلثاتي مطابقتونه

Trigonometry identities



پوهېږو چې $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ يو الجبري مطابقت دی، ځکه د a او b په ټولو قيمتونو سره د مساوات داوړه خواوې برابرېږي.

آيا $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ يو مثلثاتي مطابقت کيدلی شي؟

فعاليت

- په لاندې جدول کې د α د مختلفو قيمتونو لپاره د A او B افادو قيمتونه بشپړ کړئ.

α	$A = \dfrac{\cot\alpha}{\csc - 1}$	$B = \dfrac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		

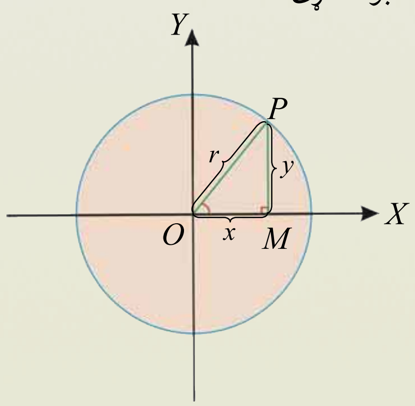
- د جدول له بشپړولو څخه وروسته د A او B قيمتونه پرتله او اړيکه يې وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاسته راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ټولو قيمتونو سره ، د مساوات داوړه خواوې برابرې شي، مثلثاتي مطابقت بلل کيږي،لکه: $\dfrac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha} = \dfrac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1}$

که α هر قيمت واخلي، د پورته مساوات داوړه خواوې مساوي کيږي.

د α د زاويې د هر قيمت لپاره د $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ مطابقت ثبوت کړئ.



ثبوت: د $C(O,r)$ په مثلثاتي دايره کې د OMP په قايم- الزاويه مثلث کې گورو او ليکلی شو چې:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \text{ او } \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

له بلې خوا د فيثاغورث له قضيې څخه لرو:

$$y^2+x^2=r^2$$

د مساوات دواړه خواوې په r^2 وېشو:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2} \quad \text{يا} \quad (\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=1$$

اوس د $\frac{y}{r}$ په ځای $\sin\alpha$ او $\frac{x}{r}$ په ځای $\cos\alpha$ ليکو.

نو ليکلی شو: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ يا $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

مثلثاتي اساسي اړيکې عبارت دي له:

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha \quad , \quad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha \quad , \quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

د مثلثاتو فرعي اړيکې عبارت دي له:

$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1 \quad , \quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad , \quad \sin\alpha\cdot\csc\alpha=1 \quad , \quad \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha} \quad , \quad \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1 \quad , \quad tag\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

اوس غواړو د $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ اړيکه ثبوت کړو.

ثبوت: د فيثاغورث د قضيې په کارولو سره ليکو $x^2+y^2=r^2$

د مساوات دواړه خواوې په x^2 وېشو. $\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}\Rightarrow 1+(\frac{y}{x})^2+(\frac{r}{x})^2$

په نتيجه کې په پورته افاده کې د $\frac{r}{x}$ او $\frac{y}{x}$ د قيمتونو په ليکلو سره ليکو: $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

فعالیت

- **د مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره ثبوت کړئ چې** : $1+\cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

په عمومي توګه د مطابقتونو د حل یا ثبوت لپاره د مساوات له یوې خوا له افادې څخه د بلې خوا افاده لاسته راوړو، یعنې یوې خواته مختلفې عملیې لکه مربع کول، تجزیه، ضرب او نورې عملیې سرته رسوو، څو د بلې خوا افاده لاسته راشي، که چیرې په یوه الجبري افاده کې مثلثاتي نسبتونه یوه یا څو زاویې وي، مثلثاتي افاده بلل کیږي، د مثلثاتي اړیکو په واسطه مثلثاتي افادې ساده کولی شو.

د موضوع دلا ښه پوهېدو لپاره لاندې لارښوونې او مثالونه په پام کې ونیسئ.

لومړی مثال: د $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha\cot\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل:

$$\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

دویم مثال: د $\sin^2\beta\cdot\cot^2\beta+\cos^2\beta\cdot\tan^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$ مثلثاتي مطابقت ثبوت کړئ.

حل: په لاندې ډول افاده ساده کوو:

$$\sin^2\beta\cot^2\beta+\cos^2\beta\tan^2\beta+\tan^2\beta=\sin^2\beta\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\cos^2\beta\cdot\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$$

$$+\tan^2\beta=\cos^2\beta+\sin^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$$

دریم مثال: لاندې افاده د $\cos\beta$ له جنسه حساب کړئ.

$$(1-\sin^2\beta)\ \ (1+\sec^2\beta)=?$$

حل: $(1-\sin^2\beta)(1+\sec^2\beta)=\cos^2\beta(1+\dfrac{1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta(\dfrac{\cos^2\beta+1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta+1$

څلورم مثال: ثبوت کړئ چې $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

حل:د مطابقت د کيڼ اړخ قوسونو ته انکشاف ورکوو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=2$$

$$2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2\cdot1=2$$

پنځم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

حل:

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

$$\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$\frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}=2\cdot\frac{1}{\sin A}=2\csc A$$

شپږم مثال: وښاياست چې $\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\tan^2 A$

حل:

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A$$

$$1+\cot^2 A=\csc^2 A$$

$$\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}=\tan^2 A \quad\Rightarrow\quad \frac{\dfrac{1}{\cos^2 A}}{\dfrac{1}{\sin^2 A}}=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\tan^2 A$$

$$\tan^2 A=\tan^2 A$$

اووم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

حل: د کیڼې خوا په افاده کې د $\cot\alpha$ او $\tan\alpha$ قیمتونه د $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ له جنسه اېږدو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

اتم مثال: د $\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\tan x+\cot y$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\sin y}$$

$$=\frac{\cos x\cos y}{\cos x\sin y}+\frac{\sin x\sin y}{\cos x\sin y}\Rightarrow\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\cot y+\tan x=\tan x+\cot y$$

نهم مثال: د $\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}=\sin^2\frac{x}{2}$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل: پوهیږو چې $\frac{1-\cos x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}$ دی.

اوس د معادلې دواړه خواوې په $\frac{\tan x}{\tan x}$ کې ضربوو؛ نو:

$$\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

$$=\frac{\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\tan x\cos x}{2\tan x}$$

$$=\frac{\tan x-(\frac{\sin x}{\cos x})\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

لسم مثال: د $\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2\sec x$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\frac{1+2\sin x++\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}=2\cdot\frac{1}{\cos x}$$
$$=2\sec x$$

پوښتنې

1. د مثلثاتو د اساسي اړیکو په پام کې نیولو سره د هرې پوښتنې معادل افاده پیدا کړئ.

$a)\ \frac{\sin 25\overset{\circ}{0}}{\cos 25\overset{\circ}{0}}$ $\quad b)\ \sqrt{\sec^2\beta-1}$ $\quad c)\ \frac{1}{\cos 8\overset{\circ}{0}}$

2. هره افاده د $\sin\beta$ له جنسه پیدا کړئ.

$a)\ \cot\beta\cos\beta$, $\quad b)\ \cot^2\beta$

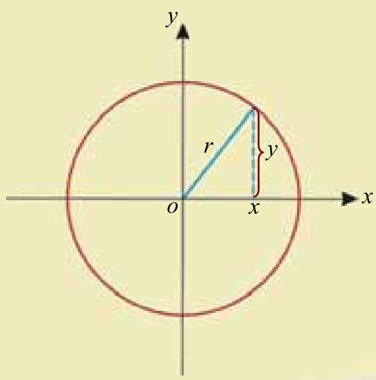
3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

$a)\ \frac{\cos ec\alpha}{\cot an\alpha+\tan\alpha}=\cos\alpha$ $\quad b)\ \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos 2x$

$c)\ \frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=tag\alpha$ $\quad d)\ \frac{\tan x-\cot x}{\tan+\cot x}=1-2\cos^2 x$

مثلثاتي معادلې

Trigonometric equation



$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ يو مثلثاتي مطابقت دی،

آیا $\sin\alpha+\cos\alpha=1$ يو مطابقت دی که يوه معادله؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د $1-2\sin\beta=0$ او $1+tag^2\beta=\sec^2\beta$ د β د کومو قيمتونو لپاره صحيح دي.

β	$1-2\sin\beta=0$	$1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$
0°		
30°		
60°		
90°		

- د β د مختلفو قيمتونو لپاره د $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ او $1-2\sin\beta=0$ ترمنځ څه ډول اړيکې شتون لري.

_ آیا $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ يو مطابقت دی، که يوه معادله؟

_ آیا $1-2\sin\beta=0$ يو مطابقت دی، که يوه معادله؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف په لاس راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ځينو قيمتونو سره د مساوات دواړه خواوې مساوي کېږي، مثلثاتي معادله بلل کېږي.

هر مثلثاتي مطابقت يوه معادله کيدلی شي، خو هره مثلثاتي معادله، مثلثاتي مطابقت نه شي کېدلای.

هره مثلثاتي معادله له لاندې څلورو حالتونو څخه په يو حالت باندې حلولای شو.

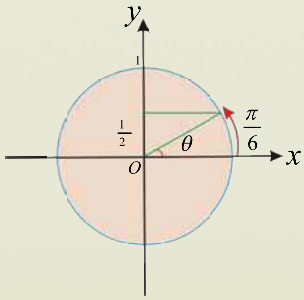
لومړی حالت: د $a\sin\alpha + b = 0$ معادله د پورتنی معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

مثال: د $2\sin x - 1 = 0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: لومړی د $\sin x$ قیمت لاسته راوړو: $\sin x = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $2\sin x = 1$ $\Rightarrow$ $2\sin x - 1 = 0$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو

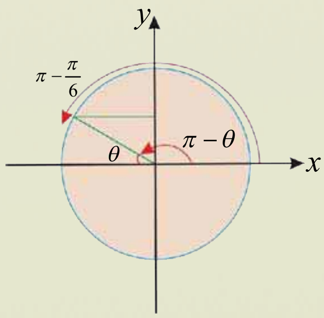
چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ شي.



$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$$

یوه مثلثاتي دایره په پام کې نیسو او هغه زاویې پیدا کوو

چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.



$$x = \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, \ldots, 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in z$$

په دویمه مثلثاتي دایره کې $(\pi - \theta)$ له رابطې څخه

هغه زاویې پیدا کوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, 5\pi - \frac{\pi}{6}, \ldots, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in z$$

نو د $\sin x = \frac{1}{2}$ د معادلې حل په لاندې دوو سټونو کې دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, \ldots, 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in z\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, 5\pi - \frac{\pi}{6}, \ldots, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in z\right\}$$

په عمومي ډول پورتني سټونه په لاندې ډول لیکلی شو:

$$A_1 \cup A_2 = A = \left\{x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \wedge \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \quad k \in Z\right\}$$

دویم مثال: د $2\sin x-3=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: $2\sin x-3=0 \;\Rightarrow\; 2\sin x=3 \;\Rightarrow\; \sin x=\frac{3}{2}$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیداکوو چې $\sin x=\frac{3}{2}$ شي، دا چې د هرې زاویې د $\sin$ -1 او $+1$ په منځ $(-1\le \sin x\le 1)$ دی، نو هغه زاویه چې $\sin$ یې $\frac{3}{2}$ وي، وجود نه لري، نو په دې اساس معادله حل نه لري.

دویم حالت: $a\cos x+b=0$

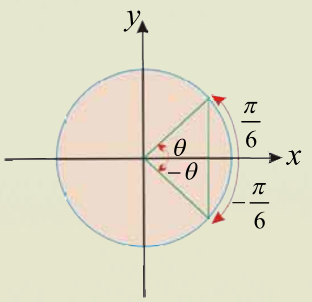
د پورتنی معادلې د حل مناسب ځواب د پیداکولو لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $2\cos x-\sqrt{3}=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل:له پورتنی معادلې څخه $\cos x$ لاسته راوړو:

$$2\cos x-\sqrt{3}=0 \;\Rightarrow\; 2\cos x=\sqrt{3} \Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اوس د $[0\,,\,\pi]$ په انټروال کې هغه زاویه پیداکوو یا لټوو چې $\cos$ یې $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، هغه له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت دی، نو لیکلی شو چې $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$.



اوس د مثلثاتي دایرې په پام کې نیولو سره ټولې هغه زاویې چې $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، پیداکوو.

$$x=\frac{\pi}{6}\;,\;\; 2\pi+\frac{\pi}{6}\;,\;\; 4\pi+\frac{\pi}{6}\ldots$$

$$x=-\frac{\pi}{6}\;,\; 2\pi-\frac{\pi}{6}\;,\;\; 4\pi-\frac{\pi}{6}$$

په عمومي توګه د پورتنیو حلونو سټ داسې لیکل کېږي: $x=2n\pi\pm\theta$

$$A=\left\{x/x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\wedge x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\,,\; k\in z\right\}$$

په عمومي توګه د هرې θ زاویې لپاره لیکو: $A=\{x/x=2k\pi+\theta \,\wedge\, x=2k\pi-\theta\,,\; k\in z\}$

دویم مثال: د $2\cos x+\sqrt{2}=0$ معادله په $(0\ ,\ 2\pi)$ انټروال کې څوحلونه لري؟

حل: $2\cos x=-\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

له بلې خوا پوهېږو چې د $(0, 2\pi)$ په انټروال کې $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{3\pi}{4}=\cos x$ کېږي.

له دې امله د معادلې حل $x=\dfrac{3\pi}{4}$ په لاس راځي.

د حل سټ یې مساوي دی له:

$$A=\left\{x / x=2k\pi+\frac{3\pi}{4} \quad \wedge \quad x=2k\pi-\frac{3\pi}{4} \ \ , \ \ k\in z\right\}$$

لیدل کېږي چې معادله د $(0\ ,\ 2\pi)$ په انټروال کې دوه حلونه لري.

$$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=0} x_1=\frac{3\pi}{4}$$

$$x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=1} x_2=\frac{5\pi}{4}$$

دریم حالت: $\tan x+b=0$

د عمومي حل د پیداکولو لپاره لاندې مثالونو ته ځیر شئ.

مثال: $\tan x-\sqrt{3}=0$ حل کړئ.

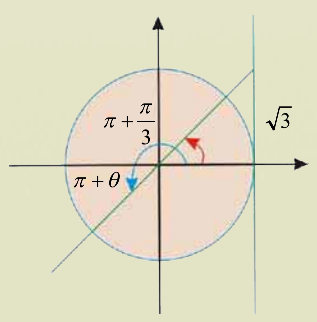
حل: له پورتنی تساوي څخه $\tan x$ په لاس راوړو: $\tan x=\sqrt{3}$

اوس د $\left(-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ په انټروال کې د x هغه زاویه لټوو چې $\tan x=\sqrt{3}$ وي او هغه زاویه له $\dfrac{\pi}{3}$ یا 60° څخه عبارت دی.

له دې امله پورتنی معادله د $\tan x=\tan\dfrac{\pi}{3}$ په صورت لاسته راځي، په مثلثاتي دایره کې وینو چې کومې زاویې له $\tan\dfrac{\pi}{3}$ سره مساوي دي.

$$x=\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{3},\ldots\right\}$$

$$x=\left\{\pi+\frac{\pi}{3},3\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ldots\right\}$$



په عمومي ډول پورتنی ستونه داسې لیکلی شو چې: $A=\left\{x / x=k\pi+\frac{\pi}{3} \quad k\in Z\right\}$

یا په عمومي ډول د هرې θ زاویې لپاره لرو چې: $A=\{x / x=k\pi+\theta\ ,\ \ k\in Z\}$

دویم مثال: لاندې معادله حل کړی.

$$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل:

$$\tan x=\tan\frac{\pi}{6} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{6}$$

د معادلې د حل سټ $A=\left\{x / x=k\pi+\frac{\pi}{6} \quad k\in Z\right\}$

دریم مثال:د $\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})$ د معادلې حلونه د $[0\ ,\ 2\pi]$ په انټروال کې لاسته راوړئ.

حل:

$$\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+(x+\frac{\pi}{3})$$

$$2x-x=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}$$

د k پر ځای صحیح عددونه لیکو، تر څو زاویې چې د $[0\ ,\ 2\pi]$ په انټروال کې دي، لاسته راشي.

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12} \xrightarrow{k=0} x_1=\frac{7\pi}{12}$$

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12} \xrightarrow{k=1} x_2=\pi+\frac{7\pi}{12}=\frac{19\pi}{12}$$

څلورم حالت: د $\cot x+b=0$ معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $\cot x-1=0$ معادله حل کړئ.

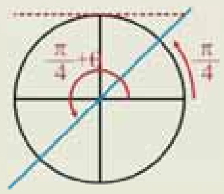
حل: له پورتنی معادلې څخه $\cot x$ پیداکوو: $\cot x-1=0 \quad\Rightarrow\quad \cot x=1$

اوس د $[0,2\pi]$ په انټروال کې هغه زاویه ګورو چې $\cot$ یې $(+1)$ وي او هغه زاویه لـه $\frac{\pi}{4}$ یا 45° څخه

عبارت ده :

نو:

$$\cot x = \cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$



$$x = \frac{\pi}{4}, 2\pi+\frac{\pi}{4}, 4\pi+\frac{\pi}{4}, \dots$$

$$x = \pi+\frac{\pi}{4}, 3\pi+\frac{\pi}{4}, 5\pi+\frac{\pi}{4}, \dots$$

نو د معادلې د حل سټ په لاندې ډول دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{4}, 2\pi+\frac{\pi}{4}, 4\pi+\frac{\pi}{4}, \dots\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi+\frac{\pi}{4}, 3\pi+\frac{\pi}{4}, 5\pi+\frac{\pi}{4}, \dots\right\}$$

$$A = \left\{x / x = k\pi+\frac{\pi}{4}, (2k+1)\pi+\frac{\pi}{4} \quad k\in Z\right\}$$

یا په عمومي ډول د هرې θ زاویې لپاره داسې لیکو:

$$A = \{x / x = k\pi+\theta \quad k\in Z\}$$

دریم مثال: د $\cot 3x = \cot x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\cot 3x = \cot x \Rightarrow 3x = k\pi + x = 3x - x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k\in Z$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پیدا کړئ.

$a)$ $3\cos x + 5 = 0$

$b)$ $4\tan x + \cot x - 5 = 0$

$c)$ $\tan x = \sqrt{3}$

دويمه درجه مثلثاتي معادلې

په تېرو درسونو کې مو ساده مثلثاتي معادلې حل کړې دي اوس دويمه درجه مثلثاتي معادلې څېړو. د مثلثاتي معادلې عمومي شکل عبارت دی له: $a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$ چې c, b, a او d ثابت عددونه دي.

$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$

لومړی مثال: د $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: په پورتنی معادله کې د $\sin x$ پر ځای y لیکو، او معادله داسې لیکلی شو:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3}$$

په دې ډول هغه کوچنی زاویه چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي، له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت ده نو:

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & \\ & k \in Z \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} & \end{array} \right\}$$

او یا لیکلی شو چې:

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

په همدې ډول د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره ډېره کوچنۍ زاویه 0.33 ده او د مثلثاتي جدول لـه مخې د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره $19^\circ\ 30'$ یا $\frac{13\pi}{120}$ دی.

$$A = \left\{ \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{13\pi}{120} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{13\pi}{120} \end{cases} \quad k \in Z \right\}$$

دویم مثال: د $\cos 2x + \sin x = 0$ معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ دی، نو لیکلی شو چې:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$$
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

که چیرې په پورتنۍ معادلې کې د $\sin x$ په ځای y وضع کړو، نو لیکو:

$$2y^2 - y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2y+1)(y-1) = 0$$
$$2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y = -1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 1$$

د $\sin x = y$ د تعویض لپاره چې مو په پام کې نیولي دي، نو د لاسته راغلو قیمتونو لپاره لرو چې:

$$\sin x = y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$\sin x = y_2 = 1$$

په دې ډول د $\sin x = -\frac{1}{2}$ لپاره هغه کوچنۍ زاویه چې sin یې $-\frac{1}{2}$ وي له $\frac{7\pi}{3}$ څخه عبارت ده.

بنا پر دې د حلونو سټ یې عبارت دی له:

$$A=\left\{\begin{array}{l}\sin x=1 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] \sin x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{6}\end{array}\right\}$$

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{2}\;,\;2\pi+\frac{\pi}{2},\;4\pi+\frac{\pi}{2},\;\ldots\right\}$$

$$A_2=\left\{2\pi+\frac{7\pi}{6},\;4\pi+\frac{7\pi}{6},6\pi+\frac{7\pi}{6},\;\ldots\right\}$$

یا په عمومي ډول:

$$A=\left\{x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}\quad,\quad x=2n\pi+\frac{7\pi}{6}\;,\;n=0,1,2,3\;\ldots\right\}$$

دریم مثال: د $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sin x(2\sin x-\sqrt{2})=0$$
$$\sin x=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0^\circ$$
$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$
$$2\sin x=\sqrt{2}$$
$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{\pi}{4}$$

د معادلې د حلونو سټ عبارت دی له:

$$A_1=\{0^\circ\,,\,\pi\,,\,3\pi\,,\,5\pi\,,\,\ldots\}$$
$$A_2=\{2\pi\,,\,4\pi\,,\,\ldots\}$$

په عمومي توګه لیکلای شو:

$$x=n\pi+(-1)^n\theta$$

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د حل سټونه پیدا کړئ.

1- $\cos 2x + 1 = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

2- $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$

3- $\sin^2 x - (1-\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو یا سیستمونو حل

د الجبري معادلو سیستم مو حل کړ. آیا د مثلثاتي معادلو سیستم حلولای شئ؟

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x \pm \cos y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

دغه معادلې په شپږو ګروپونو باندې وېشلی شو:

لومړی ګروپ: د دغه ګروپ معادلې په لاندې اتو سیستمونو کې راټولې شوې دي.

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

څرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده، x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.یو له دغو سیستمونو څخه حلوو:

$$\begin{cases}\sin x + \sin y = a \ldots \ \mathrm{I}\\ x + y = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \ \mathrm{II}\end{cases}$$

د لومړی معادلې قیمت د ضرب د فورمولونو په کارولو سره لیکو، ځکه چې د دوو ساینونو مجموعه ده.

$$\sin x + \sin y = a$$

په دې اساس:

$$\begin{cases}2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = a \ldots \ I\\ x + y = \alpha \ldots. II\end{cases}$$

اوس له II معادلې څخه د $x+y$ قیمت یعنې α د I په معادله کې اېږدو:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \ldots \ I$$

د I اړیکې دواړه خواوې په $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ باندې وېشو:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

تبصره: د پورتني معادلې ښی لوری له $+1$ څخه لوی او له -1 څخه کوچنی نه دی، ځکه چې د قوس یا زاویې ساین دی. یا په بل عبارت مربع یې له یو څخه لوی نه دی.

$$-1 \le \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

پورتنی غیرمساوات د $0 < \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} < 1$ ، په شکل لیکو بیا یې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

دواړه خواوې په $4\sin^2\frac{\alpha}{2} \neq 0$ کې ضربوو:

$$a^2 \le 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$$

پورتنی اړیکه د سیستم د حل له شرط څخه عبارت ده.

لومړی مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a = 1$ او $\alpha = \frac{\pi}{2}$ دی، وینو چې راکړل شوی شرط د سیستم د حل لپاره صدق کوي او که نه؟ $a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$

د a او α قیمتونه په پورتنی اړیکه کې ایږدو:

$$1 - 4\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \le 0 \Rightarrow 1 - 4\sin^2\frac{\pi}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 4(\sin\frac{\pi}{4})^2 \le 0$$

$$1 - 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \le 0 \Rightarrow 1 - 4\frac{2}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 2 \le 0 \Rightarrow -1 \le 0$$

لیدل کیږي چې سیستم د حل وړ دی، نو د تحویل د فورمولونو په مرسته د لومړي معادلې کیڼ لوری شکل ته تغییر ورکوو: $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$

څرنګه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ له دې امله $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ کېږي؛نو:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1\Rightarrow\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow x-y=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2}\text{.........}\ I\\ x+y=\frac{\pi}{2}\text{........}\ II\end{cases}\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow 2x=\frac{2\pi}{2}\quad\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

د x قیمت په I معادله کې اېږدو نو د y قیمت په لاس راځي:

$$\frac{\pi}{2}-y=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$y=0$$

دویم ګروپ: ددغه ګروپ اړوند سیستمونه په لاندې ډول دي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cos x\cdot\cos y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\sin y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\cos y=a\end{cases}$$

څرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی له: $-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$

دویم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x+y=\pi\\ \sin x\sin y=1\end{cases}$$

حل: په پورتنی سیستم کې $a=1$ ، $\alpha=\pi$ دی د دغو معادلو د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}=-\cos\quad\frac{\pi}{2}=0$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

د سیستم د حل شرط ته په کتنې سره کولای شو ولیکو:

$$-\cos^2\frac{\pi}{2} \le a \le \sin^2\frac{\pi}{2}$$
$$0 \le a \le 1$$

د II معادلې کیڼ لوری د تحویل د فورمول په کارولو سره لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

څرنګه چې $\sin x\sin y = 1$ دی، بنا پر دې $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2$

له بلې خوا $x+y=\pi$ دی نو: $\cos(x-y) - \cos\pi = 2$

همدارنګه پوهېږو چې $\cos\pi = -1$ دی.

نو:

$$\cos(x-y) - (-1) = 2 \Rightarrow \cos(x-y) + 1 = 2$$
$$\Rightarrow \cos(x-y) = 2-1 \Rightarrow \cos(x-y) = 1$$
$$\cos(x-y) = \cos 0^\circ$$
$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

د I له معادلې څخه د x قیمت پیداکوو:

$$x+y=\pi \Rightarrow x+x=\pi \Rightarrow 2x=\pi$$

$$x=\frac{\pi}{2} \quad ,y=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x=y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$$

دریم ګروپ: دغه ګروپ څلور لاندې سیستمونه تشکیلوي، چې عبارت دي له:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

دریم مثال: لاندې مثلثاتي سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \end{cases}$$

حل: لیدل کیږي چې دغه سیستم له دریم ګروپ سره مطابقت لري نو، په لاندې ډول کړنه کوو یعنې د سیستم دویمه معادله د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره داسې لیکو:

$$\frac{\text{sinx} - \text{siny}}{\text{sinx} + \text{siny}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

د $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ او $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ قیمتونه په پورتني اړیکه کې ایږدو:

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

څرنگه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ سره کيږي.

$$\cot\frac{\pi}{4}\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

له بلې خوا $\cot\frac{\pi}{4}=1$ دی نو معادله لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan\frac{x-y}{2} = \tan 15^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2} = 15^\circ$$

$$x-y = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

د معادلو سستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y = \dfrac{\pi}{2} \\ x-y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

اوس د x قیمت په پورتنی یوه معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{3}-y=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=y\Rightarrow\frac{2\pi-\pi}{6}=y$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3} \text{ او } y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

خلورم گروپ: دغه گروپ اته لاندې سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cot x\pm\cot y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \tan x\pm\tan y=a\end{cases}$$

خرنگه چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $a^2-4+4a\cot\alpha\geq 0$

خلورم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{3}\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: کولی شو لومړی معادله داسې ولیکو: $\tan(x-y)=\tan\frac{\pi}{3}$

له بلې خوا پوهېږو چې $\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$

د $\tan x-\tan y=-2\sqrt{3}$ قیمت په پاسنی معادله کې ایږدو:

$$\frac{-2\sqrt{3}}{1+\tan\cdot\tan y}=\sqrt{3}$$

د مساوات دواړه خواوې په $\sqrt{3}$ باندې وېشو او لیکو.

یا:

$$\frac{-2}{1+\tan\cdot\tan y}=1\quad\Rightarrow\quad 1+\tan x\cdot\tan y=-2$$

یا:

$$\Rightarrow \tan x\cdot\tan y=-3$$

نو:

$$\begin{cases}\tan x\cdot\tan y=-3.............\ \mathrm{I}\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}.......\ \mathrm{II}\end{cases}$$

د $\tan x$ قیمت له II معادلې څخه په لاس راوړو په I کې یې ایږدو:

$$\tan x = -2\sqrt{3} + \tan y$$

$$(-2\sqrt{3} + \tan y)\tan y = -3$$

$$\tan^2 y - 2\sqrt{3}\tan y + 3 = 0$$

$$(\tan y - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y - \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\pi}{3}$$

هغه مثبت کوچنی قوس چې په دغه معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $y = \frac{\pi}{3}$

د y د قیمت په پام کې نیولو سره د I له معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\tan x \cdot \sqrt{3} = -3 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$x = 2\frac{\pi}{3}$$

پنځم ګروپ: دغه ګروپ لاندې دوه سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

د تېر په څېر بیاهم α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y معلوم قوسونه یا زاویې دي.

دپورتني سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $-1 \leq \frac{1+a}{1-a}\cos\alpha \leq 1$

پنځم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7\frac{\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}$$

لیدل کېږي چې دغه سیستم په پنځم ګروپ پورې اړه لري او په لاندې ډول یې حلوو:

$$\tan x \tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

د $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$ او $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$ قیمتونه په اړونده اړیکه کې اېږدو.

$$\tan x \tan y = \frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]}$$

د $x+y$ قیمت د سیستم له لومړۍ معادلې څخه په پورتنۍ اړیکه کې اېږدو:

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}}$$

څرنګه چې $\tan x \cdot \tan y = 0$ سره راکړل شوی دی، نو لیکو:

$$\frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}} = 0$$

ددې لپاره چې کسر مساوي په صفر شي، نو باید صورت یې له صفر سره برابر شي؛ یعنې:

$$\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\cos 7\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x - y = \frac{5\pi}{6}$$

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له:

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x - y = 5\frac{\pi}{6} \\ x + y = 7\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi \quad , \qquad x = \pi$$

د x قیمت د I په معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=5\frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi-y=5\frac{\pi}{6} \quad , \quad -y=\frac{5\pi}{6}-\pi$$

$$y=\pi-\frac{5\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{6\pi-5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

شپږم ګروپ: په دغه ګروپ کې لاندې سیستمونه شتون لري:

$$\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=a \end{cases}$$

د حل د امکان شرط عبارت دی، له: $\quad -1\le\frac{a-1}{a+1}\sin\alpha\le 1$

شپږم مثال:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=-3 \end{cases}$$

د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره لرو:

$$\frac{\tan x-\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{-3-1}{-3+1}=2$$

د مساوات په کیڼې خوا کې د صورت او مخرج قیمتونه د sin او cos له جنسه داسې اېږدو:

$$\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}=2 \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=2$$

$$2\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

څرنګه چې $x-y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو:

$$2\sin(x+y)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\sin(x+y)=\frac{1}{2}$$

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $\frac{\pi}{6}$ چې د معادلو لاندې سیستم جوړوو:

$$x+y=\frac{\pi}{6}$$

$$x-y=\frac{\pi}{2}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6} \;.....\mathrm{I} \\ x-y=\frac{\pi}{2} \;.....\mathrm{II} \end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x=\frac{\pi+3\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$

$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

د x قیمت د I په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3}+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$$

$$y=\frac{\pi-2\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$$

$$y=-\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او ووایاست چې په کوم ګروپ پورې اړه لري؟

$a)\; \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=1 \end{cases}$

$b)\; \begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x}=2 \end{cases}$

د څپرکي مهم ټکي

د ساین قانون: د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې شته:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه د ساین د قانون په نوم یادېږي.

د کوساین قانون: د ABC په هر مثلث کې چې دضلعو اوږدوالي یې b, a او c وي، د ضلعو او زاویو تر منځ لاندې اړیکې شته:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\ \cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\ \cos C$$

د tan قانون: د ABC په هر مثلث کې د هغه د ضلعو او زاویو ترمنځ د tan له جنسه لاندې اړیکې شته:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}\quad,\quad\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\quad,\quad\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

مثلثاتي مطابقت: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې د ټولو قیمتونو لپاره د مساواتو دواړه خواوې مساوي شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي.

مثلثاتي معادلې: هغه مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره دواړه خواوې مساوي شي، معادله بلل کېږي.

د مثلثاتي معادلو سیستمونه

مثلثاتي معادلو سیستمونه په لاندې شپږو ګروپونو وېشل شوي دي:

لومړی ګروپ:

$$\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}\qquad\begin{cases}\cos x\pm\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

دویم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

دریم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases}$$

څلورم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases}$$

پنځم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x + \tan y = a \end{cases}$$

شپږم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په ځیر سره ولولئ، هرې یوې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب یې په نښه کړئ.

1. که چیرې $A = 20^\circ$, $b = 10$, $c = 7$ وي، د a د ضلعې اوږدوالی عبارت دی له:

$a)$ 16.4 $b)$ 16 $c)$ 15.9 $d)$ 16.8

2. که چیرې $a = 8$, $b = 5$ او $c = 10$ وي، د B زاویې اندازه عبارت ده له:

$a)$ 28° $b)$ 29° $c)$ 29.4° $d)$ 28.5°

3. که چیرې $A = 48^\circ$, $B = 22^\circ$ ، $a = 5$ وي د b اوږدوالی عبارت دی له:

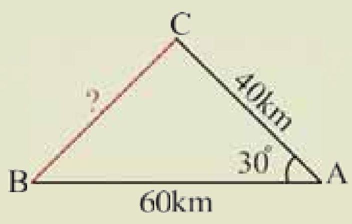
$a)$ 8 $b)$ 8.5 $c)$ 9 $d)$ -9.5

4. د $\sec x(\sec x - \cos x)$ مثلثاتي مطابقت مساوي دی له :

$a)$ $\tan x$ $b)$ $\frac{1}{\tan x}$ $c)$ $\cot x$ $d)$ $\tan^2 x$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که چیرې د $A = 30^\circ$, $c = 8$, $b = 5$ واحده وي، د a ضلع او $\sin C$ پیدا کړئ.
2. که په یوه مثلث کې $a = 8$, $b = 5$, $c = 10$ واحده وي، د B زاویې اندازه پیدا کړئ.
3. د ABC په مثلث کې که $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ او $A = 30^\circ$ وي، د B او C زاویو اندازه پیدا کړئ.
4. دوې بېړۍ د A له ټکي څخه په دوو خواوو داسې په حرکت پیل کوي چې د منځ زاویه یې 30° ده، که له یوه ساعت څخه وروسته، لومړی بېړۍ $40\,km$ او دویمه بېړۍ $60\,km$ واټن وهلی وي، د دوو بېړیو ترمنځ واټن پیدا کړئ.



5. د $\cot^2\beta$ او $\sin\beta$ او $\cos\beta$ له جنسه محاسبه کړئ.

6. لاندې مطابقتونه ساده کړئ.

a) $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$

b) $\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$

c) $\tan A+\cot A=2\csc 2A$

d) $\frac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}$

e) $\frac{\cos A}{1-\sin A}=\tan(45+\frac{A}{2})$

f) $\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha$

7. لاندې مثلثاتي معادلې حل کړئ.

a) $\cos^2 x+\cos^4 x=0$

b) $\tan^2 x-4\tan x+3=0$

c) $4\cos\beta-2=0$

d) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

e) $\cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=-1$

8. آیا د $2\sin^2 x-\cos x=2\cos 2x+\sin x$ مساوات یو مطابقت دی او که معادله؟

9. لاندې افادې ساده کړئ.

a) $\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$

b) $1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=?$

c) $\cos 4x+2\sin^2 2x$

d) $(\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x)^2$

10. د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه لومړی تشخیص او بیا یې حل کړئ.

a) $\begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \cos x\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

b) $\begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y)\\ \tan x-\tan y=1\end{cases}$

درېم څپرکی

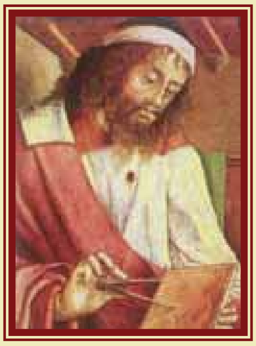
فضايي هندسه

اقليدس د دوه اړخيزې (دوه بعدي) او درې اړخيزې (درې بعدي) هندسي بنسټ ايښودونکی دی.

اساسي مفاهیم او اکسیومونه

د اقلیدس د هندسي مفاهیمو څېړنې په دوو بعدونو کې د مسطحې هندسې په نامه یادېږي.

هغه هندسي مفاهیم، چې په دریو اړخونو(بعدونو) کې څېړل کېږي، فضایي هندسه نومیږي.



فعالیت

- د مفاهیمو په برخه کې لکه لومړنی اصطلاحات، دلیل، برهان او قضیو په هکله فکر وکړئ. خپل منځ کې خبرې او د موضوع په هکله بحث وکړئ.

له پورتني بیان او بحث څخه وروسته کولای شو، لاندې تعریف وکړو:

لومړنی اصطلاحګانې Postulates: د هر علم په برخه کې د لومړنیو اصطلاحګانو څخه سترګې پټولای نشو د نورو علومو په ډول په هندسه کې هم هغه مفاهیم او مفکورې، چې پرته له کوم تعریف څخه منل کېږي لومړني اصطلاحات بلل کېږي. لکه: ټکی(نقطه)، کرښه(خط)، مستوي او فضا.

منطقي دلیل او برهان Logical Reason: برهان د ذهن هغه عمل ته ویل کېږي چې له یو لړ مخکینیو سمو وړاندیزونو او څېړنو څخه و روستنیو څېړنو ته رسېږي چې د هغې سموالی مخکې منل شوی وي. موږ هم کولای شو، هغه و منو.

قضیه Theorem : هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت یو لړ منطقي دلایلو ته اړتیا ولري، قضیه بلل کېږي.

ټکی(نقطه): موږ نقطه د یو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنی اصطلاح(تعریف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقیم خط: کش شوی تار، دمیزڅنډه او د خط کش تېغه د مستقیم خط مفهوم او مطلب بیانوي. د مستقیم خط بېلېدونکي علامې دا دي چې د دوو راکړل شوو ټکو څخه یوازې او یوازې یوه مستقیمه کرښه تیریدلای شي مستقیم خط د لومړنی اصطلاح(تعریف شوی نه دی) په ډول منو.

باید فکر مو وي چې یو مستقیم خط دواړو خواوو ته تر لایتناهي پورې غزیدلای شي.

لومړی اصل: دوې ښکاره او ټاکلې نقطې یوازې او یوازې یو مستقیم خط څرګندوي.

دویم اصل: هر مستقیم خط لږ ترلږه دوې څرګندې نقطې لري چې په یو مستقیم خط باندې واقع دي، لږ تر لږه داسې درې نقطې شتون لري چې په یوه مستقیم خط باندې واقع نه وي.

دریم اصل: کولای شو په یوه مستقیم خط باندې د هرو دوو نقطو تر منځ یوه دریمه نقطه په لاس راوړو.

مستوي: د ولاړو اوبو سطح او د ټولګي تخته د مستوي مفهوم څرګندوي او مستوي د لومړنی اصطلاح (تعریف شوې نه ده) په توګه منل کېږي.

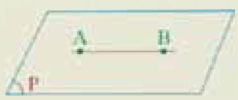
لومړی اصل: په هره مستوي کې لږ تر لږه درې نقطې شتون لري چې د یوه مستقیم خط په استقامت واقع نه وي.

دویم اصل: له هرو دریو نقطو څخه، چې د یوه مستقیم خط په استقامت پرتې نه وي، یوه مستوي تیریږي.

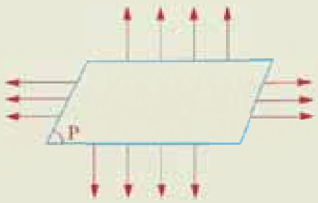
درېيم اصل: که چیرې د یوه مستقیم خط دوې نقطې په یوې مستوي کې وي، دا خط په مستوي کې دی.

په مسطحه هندسه کې د مستوي رسمیدلو ته اړتیا نشته، ځکه چې ټول شکلونه لکه دکاغذ مخ، د لرګي تخته، چې هر یو یې یوه مستوي څرګندوي رسمیږي، خو په فضایي هندسه کې د مستوي رسمولو ته اړتیا شته، ځکه چې په فضایي هندسه کې مستوي یوه نه، بلکې ډیرې دي. زیاتره په فضایي هندسه کې مستوي د متوازي الاضلاع، مستطیل او یا هوارې سطحې په واسطه ښودل کیږي او په یوه کونج کې یې یو توری لیکي.

مستوي نه ده



محدوده مستوي



نا محدوده مستوي

دا مستوي ګانې چې په تېرو شکلونو کې لیدل کیږي، په همدې پراخوالي نه دي، بلکې ترلایتناهي پورې امتداد لري. دا چې مستوي ګانې په پورته شکلونو کې لیدل کیږي هغه متوازي الاضلاع او مستطیل نه دي، بلکې د مستوي په یوې هوارې سطحې کې ښودل دي.

ټولې نښې چې په مسطحه هندسه او ریاضي کې استعمالیږي، په فضایي هندسه کې هم استعمالیږي.

هغه اکسیومونه، چې په مسطحې هندسې کې موجود دي، په فضایي هندسه کې هم له دې اکسیومونو څخه کار اخېستل کېږي.

سربیره په مسطحه هندسه په فضایي هندسه کې هم یو لړ ځانګړي اکسیومونه شته چې په لاندې ډول بیانیږي.

د مستوي لومړنی اکسیوم: هغه مستقیم خط چې د مستوي دوې مختلفې نقطې سره نښلوي په دې مستوي کې شامل دی.

د مستوي دویم اکسیوم: له هغو دریو نقطو څخه چې په یوه مستقیم خط واقع نه دي، یوازې او یوازې یوه مستوي تیریږي.

د متقاطع مستوي ګانو اکسیوم: که چیرې دوې مستوي ګانې یو ګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چیرې یو ګډ مستقیم خط ولري، د غه متقاطع خط ته د دوې مستوي ګانو مشترک فصل وایي.

فضا: فضا هم د لومړنی اصطلاح (تعریف شوې نه ده) په توګه پېژنو.

لومړی اصل: دلایتناهي نقطو مجموعې ته فضا وایي.

دویم اصل: لږتر لږه څلور داسې نقطې شته چې په یوه مستوي کې واقع نه دي.

پوښتنې

1. څرګنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکی مېز د څلورو پښو لرونکی مېز په پرتله ټینګ دی؟
2. ولې نقطه، کرښه او مستوي لومړنی اصطلاحګانې بولي؟
3. له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تیریدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي.

په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي

په فضا کې دوه قلمونه، دوه کتابونه، یو کتاب او یو قلم کوم حالتونه لري؟

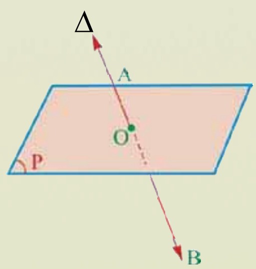
درې بُعدي فضا:

هغه فضا، چې موږ په کې ژوند کوو، درې بُعدي فضا ده. دا درې بُعدي فضا یوه له نه تعریف شوو لومړنیو مفهومونو څخه ده.

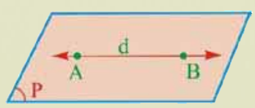
فضا دلایتناهي نقطو مجموعه ده، خط او مستوي هم په ترتیب سره یو بعد، دوه بعدونه لري چې هر یو د فضا د سټ یوه برخه(جزء) دی.

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت: یوه مستقیمه کرښه او یوه مستوي لاندې درې حالتونه لري:

1. **که چیرې یو مستقیم خط او یوه مستوي یوه مشترکه نقطه ولري، دا خط او مستوي یو له بل سره متقاطع دي. دمثال په ډول په دې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي د O په نقطه کې قطع کړې ده.**

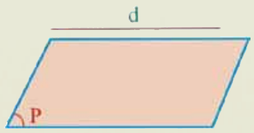


2. که چیرې یو مستقیم خط له یوې مستوي سره دوه او یا له دوو څخه زیاتې مشترکې نقطې ولري دا مستقیمه کرښه له مستوي سره منطبقه



ده او یا داسې ویل کېږي چې مستقیمه کرښه په مستوي کې شامله
ده، د مثال په ډول د d مستقیم د P په مستوي کې شامل دی.

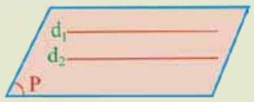
3. که چیرې یوه مستقیمه کرښه له یوې مستوي سره هیڅ ګډه نقطه و نه لري، دا مستقیم له مستوي سره موازي دي، مثلاً په لاندې شکل کې د d مستقیم خط له P مستوي سره موازي دی.



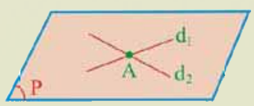
له یو بل سره د دوو مستقیمو کرښو نسبي حالت:

1- که چیرې دوه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې شامل وي، نوموړي خطونه د همغې مستوي خطونه بلل کیږي، او یو له لاندینیو حالتونو(وضعیتونو)څخه لري.

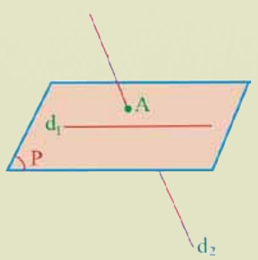
په یوې مستوي کې دوه خطونه هغه وخت موازي بلل کېږي چې هېڅ ګډټکی ونه لري.



2- په یوه مستوي کې دوه خطونه، چې یوه ګډه(مشترکه) نقط ولري، متقاطع خطونه بلل کیږي.

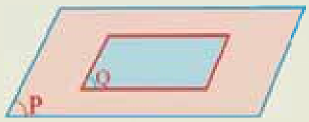


3- دوه مستقیم خطونه چې په یوه مستوي کې پراته نه وي او کومه مشترکه نقطه هم و نه لري، متنافر خطونه بلل کیږي؟

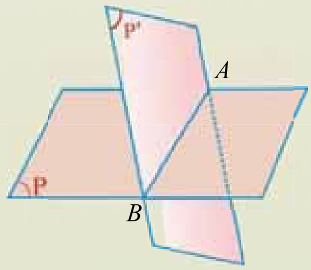


د دوو مستويګانو نسبي حالت:

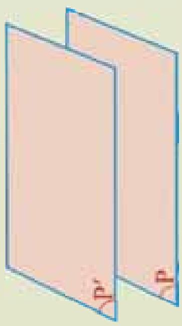
په عمومي ډول دوې مستويګانې لاندې درې حالتونه لري.



منطبق: که چیرې دوې مستويګانې لږ تر لږه درې مـشترکې نقطې ولري چې د یو مستقیم خط په امتـداد پرتـې وي، یـو پـر بـل منطبقـې مستويګانې بلل کیږي، لکـه پـه مخـامخ شـکل کـې د P او Q دوې مستويګانې یو پر بل منطبقې دي.



متقاطع مستويګانې: که چیرې دوې مستويګانې یو ګډ مـستقیم خط ولري متقاطع مستويګانې بللې کیږي. دغه د AB مشترك خط ته مشترك فصل هم وایې. لکه مخامخ شکل.



3- که چیرې دوه مستويګـانې هـیڅ کـوم ګـډ ټکـی و نـه لـري، سـره موازي دي، د مثال په توګه د P او P' مستويګانې.

فعالیت

- په فضا کې له یوې نقطې څخه څو مستقیم خطونه تیریږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستقیم خطونه تیریږي؟
- له یوې نقطې څخه څو مستوي ګانې تیریږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تیریږي؟
- له دریو نقطو څخه څو مستوي ګانې تیریږي چې درې واړې نقطې پکې شاملې وي؟

پوښتنې

1- د R او T نقطې د P په مستوي کې پرتې دي، د کوم دلیل له مخې د $\overline{RT}$ خط د P په مستوي کې پروت دی؟

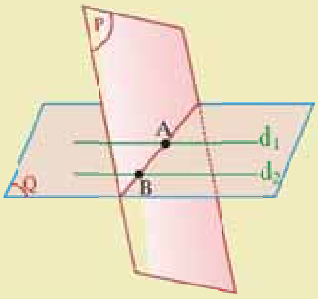
2- که د Δ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت نه وي، د Δ مسقیم خط به د P مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟

3- که چیرې د AB مستقیم خط او د P مستوي د M او K دوې ګډې نقطې ولري، د $\overline{AB}$ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت دی؟

4- د B, A او C نقطې د P په مستوي کې واقع دي او هم د B, A او C نقطې د p' په مستوي کې پرتې دي، د P او p' مستوي ګانې یوه له بلې سره څه اړیکه لري؟

په فضا کې موازي مستقيم خطونه

آيا په فضا کې مستقيم خطونه موازي دي؟



تعريف:

دوه مستقيم خطونه چې په يوې مستوي کې پراته او ګډه نقطه و نه لري، موازي خطونه بلل کېږي.

د موازاتو اکسيوم: له يوې خارجي نقطې څخه له يوې مستقيمې کرښې سره يوازې او يوازې يوه موازي مستقيمه کرښه رسمولای شو او بس.

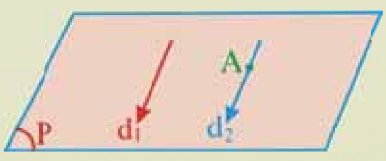
فعاليت

- د A ټکی د P مستوي او د d_1 مستقيم خط چې د A ټکی وربانديې پروت نه وي، په پام کې ونيسئ؟
- د A ټکی او د d_1 له مستقيم خط څخه څو مستوي ګانې تېريدلای شي؟ ولې؟

له پورتني فعاليت څخه د قضيې متن او ثبوت بيانوو.

قضيه: له يوې خارجي نقطې څخه له يوه مستقيم خط سره يوازې يو موازي مسقيم خط رسمولای شو او بس.

ثبوت: د A له نقطې او د d_1 له مستقيمې کرښې څخه يوازې يوه د P مستوي تيريږي، ولې؟



اوس د P په مستوي کې د A له نقطې څخه يوازې د d_2 مستقيم خط د d_1 له مستقيم خط سره موازي رسمولای شو.

(پورتنی ثبوت په مسطحه هندسه کې لوستل شوی). نو پورتنی دعوا چې ټکی او خط په فضا کې وي، هم سموالی لري.

فعالیت

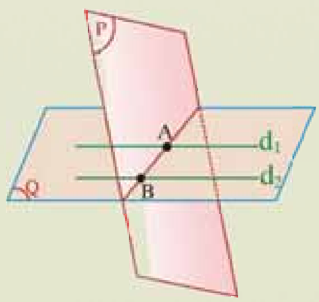
دوه د d_1 او d_2 موازي خطونه او یوه د A نقطه د P له مستوي څخه بهر(خارج) په پام کې ونیسئ.

- آیا د d_1 او d_2 مستقیم خطونه یوه بله مستوي ټاکلي شي؟
- که چیرې د P مستوي د Q مستوي د A په ټکي کې قطع کړي، آیا د P مستوي به د d_2 مستقیم خط هم قطع کړي؟
- آیا دوې مستوي‌ګانې یوه بله د یوه مستقیم خط په اوږدو کې قطع کوي، ولې؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

قضیه: که دوه مستقیم خطونه موازي وي او مستوي یو له هغو څخه قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

ثبوت: د d_1 او d_2 یو له بل سره موازي مستقیمونه د Q په مستوي کې پراته دي.



که د P مستوي د d_1 مستقیم د A په نقطه کې قطع کړي، نوموړې مستوي د d_2 مستقیم هم د B په نقطه کې قطع کوي د تعریف له مخې د d_1 او d_2 موازي خطونه یوه د Q مستوي ټاکي، د P او Q مستوي-ګانې د A یوه مشترکه نقطه لري، که چیرې دوې مستوي‌ګانې یوه بله په یوه نقطه کې قطع کړي، نو ویلای شو چې هغوی یو بل د یوې مستقیمې کرښې په اوږدو کې قطع کوي، له دې امله د P او Q مستوي‌ګانې د d_2 مستقیمه کرښه د B په نقطې کې هم قطع کوي. څکه یو مستقیم خط چې په یوې مستوي کې له دوو موازي خطونو څخه یو قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

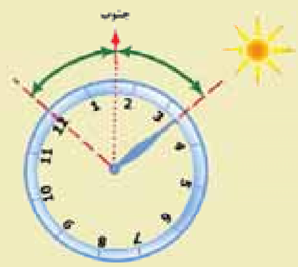
پوښتنې

1- که چیرې دوه مستقیم خطونه له یوه دریم مستقیم خط سره موازي وي ثبوت کړئ چې دا مستقیم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟

2- که چیرې د E او F مستوي‌ګانې سره موازي او د L_1 مستقیم خط د E مستوي کې او د L_2 مستقیم خط د F په مستوي کې واقع وي آیا $L_2 // L_1$ دی؟

3- که د E او F مستوي ګانې سره متقاطع او د P مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آیا د E او F ګډ فصل د E او P له مشترک فصل او د F او P له مشترک فصل سره موازي دی؟

په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه



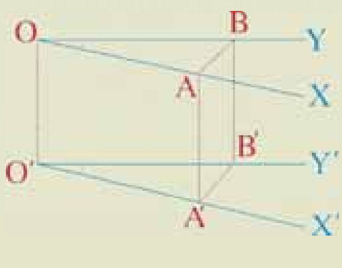
کـه چيـرې د يـوې زاويــې دورانــي لـوری د سـاعت د عقربې په مخالف لوری حرکـت وکـړي، زاويـه مثبت او که د ساعت د عقربې په همجهت(عيـن لـوری) وي زاويه منفي ده.

فعاليت

- د XOY او $X'O'Y'$ زاويې داسې په پام کې ونيسئ چې ضلعې يې سره موازي او هم جهته وي.
- د $\overline{OX}$ او $\overline{O'X'}$ لـه ضـلعو څخـه د $\overline{OA}$ او $\overline{O'A'}$ دوه مـساوي قطعـه خطونـه او د $\overline{OY}$ او $\overline{O'Y'}$ لـه ضلعو څخه د $\overline{OB}$ او $\overline{O'B'}$ مساوي قطعه خطونه بيل کړئ.
- د $OAA'O'$ شکل، کوم هندسي شکل لـري، دليـل يـې ووايـاسـت، د OAB او $O'A'B'$ جـوړ شـوې مثلثونه له يو بل سره څه اړيکه لري؟

د پورتني فعاليت له مخې د قضيې متن او ثبوت په لاندې ډول بيانولی شو.

قضيه: په فضا کې دوې زاويې، چې دوه په دوه موازي او هم جهته ضلعې ولري، يوه له بلې سره مساوي دي.



ثبـوت: د XOY او $X'O'Y'$ زاويـې پـه پـام کـې نيـسو، داســـې چـــې $\overline{OX} // \overline{O'X'}$ او $\overline{OY} // \overline{O'Y'}$ دي، يـــو لوری(يوجهت) هم لري. پـه شـکل کـې د OX او $O'X'$ پـر خطونو د $\overline{OA}$ او $\overline{A'O'}$ قطعه خطونه سـره مـساوي مـوازي او هم جهته دي.

نو د $OAA'O'$ شکل يوه متوازي‌الاضلاع ده. لـه دې امله د $\overline{BB'}$ او $\overline{OO'}$ قطعـه خطونـه مـوازي، مـساوي او هم لوري(هم‌جهت) دي. نو $ABB'A'$ هم يوه متوازي‌الاضلاع ده او $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ دی.

د $O'A'B'$ او OAB مثلثونه انطباق منونکي دي. ځکه $\overline{AB} = \overline{A'B'}$، $\overline{OA} = \overline{A'O'}$ او $\overline{OB} = \overline{O'B'}$ دي

له دي امله $A\hat{O}B = A'\hat{O'}B'$ دي.

د قضيې پايله:

i) که په ترتيب سره د دوو زاويو ضلعې موازي او هم لوري وي، نومورې زاويې يو له بل سره مساوي دي.

ii) که د دوو زاويو يوه، يوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو يوه، يوه ضلع يې موازي او مختلف جهتونه(لوري) ولري، د دغو دواړو زاويو پراخوالي 180° دی.(ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده).

د دوو متنافر و مستقيمو کرښو ترمنځ زاويه:

تعريف: په فضا کې د دوو متنافر و مستقيمونو ترمنځ زاويه له هغې زاويې څخه عبارت ده چې د يوې مستوي په يوه اختياري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقيمونو د رسمولو په واسطه حاصليږي

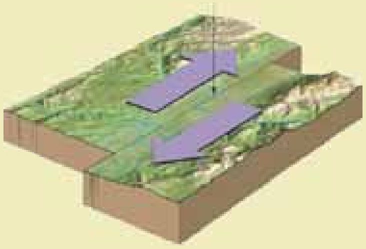
پوښتنې

1- که د دوو زاويو پراخوالی سره مساوي وي او د يوې زاويې يوه ضلع د بلې زاويې ضلعې سره موازي وي، آيا د هغو زاويو نورې ضلعې يو له بل سره موازي دي. ولې؟

2- که د دوو زاويو ضلعې سره موازي وي، ثابت کړئ چې د دغو زاويو، ناصف‌الزاويې سره موازي او يا سره عمود دي.

3- د d_1, d_2 دوو متنافرو مستقيمونو ترمنځ زاويه پيدا کړئ.

په فضا کې موازي مستقيمونه او موازي مستوي‌ګانې



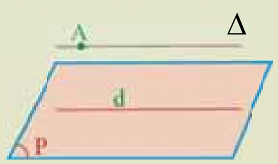
يوه مستقيمه کرښه هغه وخت له يوې مستوي سره موازي بلل کېږي چې هيڅ ګډ ټکی و نه لري.
مستوي ګانې په فضا کې هغه وخت سره موازي دي چې هيڅ ګډ ټکی و نه لري.

فعاليت

که چيرې د d مستقيم د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقيمه کرښه د P د مستوي بهر او د d مسقيم سره موازي وي، آيا د Δ مستقيم د P له مستوي سره موازي کيدلای شي؟

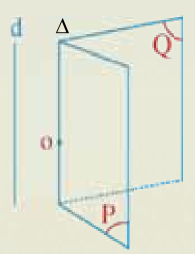
- دوې د P او Q متقاطع مستوي‌ګانې او يو مستقيم خط له دغو مستوي ګانو څخه بهر د P او Q له مستوي‌ګانو سره موازي په پام کې ونيسئ.
- د d مستقيم(مشترک فصل) د Δ له مستقيم خط سره موازي کيدای شي؟
- له يوې ټاکلي نقطې څخه د d_1 او d_2 دوو مستقيمو کرښو سره څو موازي مستوي‌ګانې چې موازي نه وي رسمولای شو؟ د فعاليتونو د هرې برخې له تر سره کولو وروسته د قضيو متن او ثبوت په ترتيب بيانوو.

قضيه: که يو مستقيم خط د يوې مستوي له يوه خط سره موازي وي. نوموړی مستقيم خط له همدې مستوي سره موازي دی.



ثبوت: د d مسقيم خط چې د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقيمه کرښه د p د مستوي بهر او د d له مستقيم سره موازي راکړل شوې، ثابتوو چې د Δ مستقيمه کرښه د p له مستوي سره موازي ده، که د p مستوي د Δ مستقيمه کرښه قطع کړي، د d مستقيمه کرښه چې د Δ له مستقيمې کرښې سره موازي ده هم قطع کوي. دا د فرضيې خلاف ده، ځکه د d مستقيمه کرښه د P په مستوي کې پرته ده، نو د p مستوي د Δ مستقيم قطع کولای نشي.

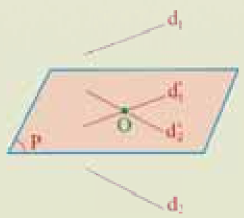
قضیه: که یوه مستقیمه کرښه له دوو متقاطع مستويګانو سره موازي وي، نوموړې مسقیمه کرښه د نوموړو مستويګانو له ګډ فصل سره موازي ده.



ثبوت: د P او Q دوې متقاطع مستويګانې په پام کې نیسو چې هره یوه یې د d له مستقیمې کرښې سره موازي ده، لکه مخامخ شکل.

که د P، Q د مستويګانو د Δ په مشترك فصل باندې د O نقطه وټاکو او له هغې نقطې څخه د d له مستقیمې کرښې سره یو موازي رسم کړو، دا موازي د Δ په مستقیمې کرښې منطبق کېږي ځکه Δ یوازیني خط دی چې په دواړو مستويګانو یعنې په P او Q کې شامل دی.

قضیه: د (O) له یوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 مستقیم خطونه چې یو له بل سره موازي نه دي یوازې یوه موازي مستوي رسمولای شو او بس.

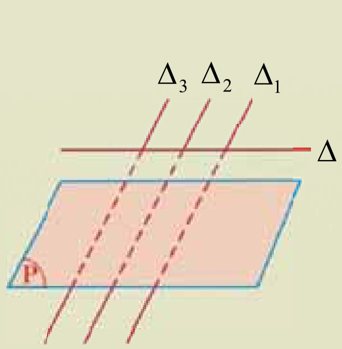


ثبوت: د (O) له نقطې څخه د d'_1 او d'_2 خطونه چې په پرتیب له d_1 او d_2 مسقیمونو سره موازي وي، رسموو د P مستوي چې د (O) له نقطې څخه تیرېږي او د d'_1 او d'_2 مستقیمې کرښې په خپل ځان کې لري له d_1 او d_2 سره موازي دي؟ ولې؟

که چیرې d_1 او d_2 یو له بل سره موازي وي، نو d'_1 او d'_2 یو پر بل منطبق کېږي.

پوښتنې

1- که چیرې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستويګانې له هغو سره رسمولای شئ؟

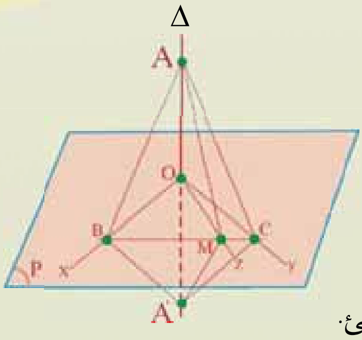


2- که چیرې د Δ_1 , Δ_2 او Δ_3 موازي خطونه د P مستوي او د Δ مستقیمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د Δ مستقیمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات یو له بل سره مساوي دي.

په فضا کې متعامدې مستقيمې کرښې او مستوي‌ګانې

که د Δ مستقيمه کرښه د P مستوي په (O) ټکي کې عمود وي، آيا هغه ټول مستقيم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تيريږي، د Δ په مستقيمې کرښې باندې عمود دي؟

فعاليت



- مخامخ شکل په پام کې ونيسئ د $\overline{ox}$ او $\overline{oy}$ مستقيمونه د Δ په مستقيم د (O) په نقطه کې عمود رسم کړئ.
- د P په مستوي کې د OZ اختياري مستقيمه کرښه په پام کې ونسيئ.
- د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ مساوي‌الفاصله قطعه خطونه جلا کړئ.

يو اختياري قاطع داسې رسم کړئ چې د $\overline{OX}$ مستقيمه کرښه د B او $\overline{oy}$ مستقيمه کرښه د C او د $\overline{OZ}$ مستقيمه کرښه د M په نقطو کې قطع کړي. $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ له $\overline{AA'}$ سره څه اړيکه لري.

- د OZ مستقيمه کرښه د Δ پر مستقيمه کرښه عمود ده؟ ولې؟

د پورتني فعاليت له تر سره کولو وروسته د قضيې متن او ثبوت داسې بيانوو.

قضيه: که د Δ يوه مستقيمه کرښه پر هغو دوو مستقيمو کرښو چې دواړه د Δ مستقيمه کرښه د (O) په نقطه کې قطع کوي عمود وي، په هغو ټولو مستقيمو خطونو باندې چې په مستوي کې متقاطع دي او د (O) له نقطې څخه تيريږي، عمود ده.

ثبوت: دوې مستقيمې کرښې د $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ په پام کې نيسو، دا دوه مستقيمونه د Δ پر مستقيم چې د(O) له نقطې څخه تيريږي، عمود دي او د P مستوي جوړوي، د P په مستوي کې د OZ اختياري(کيفي) مستقيمه کرښه په پام کې نيسو، د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ دوه متساوي الفاصله قطعه خطونه جلاکوو.

او د P په مستوي کې يو قاطع رسموو چې $\overline{OX}$ د B او $\overline{OY}$ د C او oz مستقيم د M په نقطه کې قطع کړي.

$\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ دواړه $\overline{AA'}$ منځنې عمودونه دي؛ نو

$$\overline{BA} = \overline{BA'}$$
$$\overline{CA} = \overline{CA'}$$

د ABC او $A'B'C'$ مثلثونه انطباق منونکی دي. د انطباق منلو د عمليې په وخت کې د C, B او M نقطې ثابتې پاتې کېږي او د A نقطه په A' او $\overline{MA}$ په $\overline{MA'}$ منطبق کيږي، نو ليکلی شو. $\overline{MA'} = \overline{MA}$

د $M\overset{\Delta}{A}A'$ مثلث متساوي الساقين دي او د $\overline{MO}$ منځنی(ميانه) په عين وخت کې د $\overline{AA'}$ منځنی عمود دی په نتيجه کې د Δ مستقيمه کرښه د $\overline{OZ}$ پر مستقيمې کرښې باندې عمود دی.

فعاليت

- که د B او C نقطې د P او Q له ټکو څخه متساوي الفاصله وي، د BC مستقيمې کرښې هره نقطه له P او Q څخه متساوي‌الفاصله ده. اوس د X يوه اختياري(کيفي) نقطه د BC پر مستقيمه کرښه وټاکئ او ثابت کړئ چې X د P او Q څخه متساوي الفاصله دی.

پوښتنې

1- که چيرې د d_1 او d_2 خطونه يو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستويګانې رسمولای شئ؟

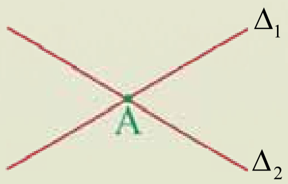
2- که د L خط د P پر مستوي عمود وي، آيا ټولې هغه مستويګانې چې د L خط په کې پروت دی د P په مستوي باندې عمود دی؟

په فضا کې موازي مستوي ګانې

دوې مستوي ګانې چې هیڅ مشترکه نقطه ونه لري،
موازي مستوي ګانې بلل کېږي.

فعالیت

- د Δ_1 او Δ_2 مستقیم خطونه، چې د A په نقطه کې متقاطع دي، په پام کې ونسیئ
- له دې دوو مستقیمو خطونو او د A له نقطې څخه یوه مستوي تیرولی شو.
- له دې مستوي څخه بهر د d_1 او d_2 دوې مستقیمې کرښې چې په ترتیب سره د Δ_1 او Δ_2 سره موازي او یو بل د B په ټکي کې قطع کړي، رسم کړئ.

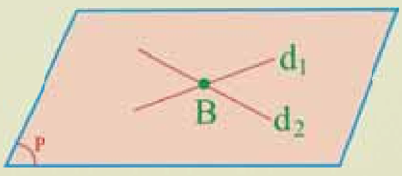


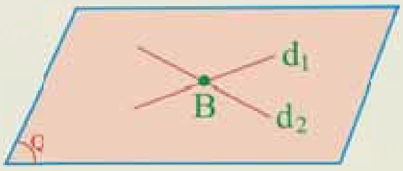
- هغه مستوي چې د Δ_1 او Δ_2 او د A له نقطې څخه جوړه شوې، له هغې مستوي سره چې د d_1 او d_2 مستقیمو کرښو او د B له ټکي څخه جوړه شوې ده، څه اړیکه لري؟

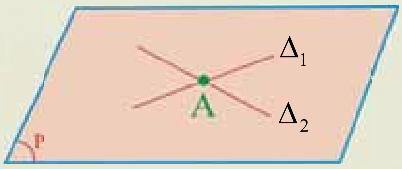
د پورتني فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانولی شو.

قضیه: که د یوې مستوي دوې متقاطع مستقیمې کرښې د بلې مستوي له متقاطع مستقیمو کرښو سره موازي وي، نوموړې مستوي ګانې سره موازي دي.

ثبوت: د Δ_1 او Δ_2 مستقیم خطونه د A په نقطه کې متقاطع دي او یوه د P مستوي جوړوي. د B له نقطې څخه(چې د P مستوي بهر ده) د d_1 او d_2 مستقیم خطونه له Δ_1 او Δ_2 سره موازي رسم شوي دي، چې d_1 او d_2 هم یوه د Q مستوي جوړوي، ثابتوو چې د P او Q مستوي ګانې سره موازي دي.







څرنګه چې d_1 او Δ_1 سره موازي دي، نو د d_1 د P له مستوي سره هم موازي دي. همدارنګه d_2 له Δ_2 سره موازي دي نو d_2 هم د P له مستوي سره موازي دی. اوس که چیرې د P او Q مستویګانې یو بل سره قطع کړي، مشترك فصل يې هم په همدې وخت کې له d_1 او d_2 سره موازي کېږي، ولې؟

دا امکان نه لري، ځکه چې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه متقاطع دي، په نتیجه کې د P او Q مستویګانې یوه بله سره قطع کولای نشي، نو یو بل سره موازي دي.

پوښتنې

که چیرې د E او F مستویګانې سره موازي وي او د L_1 مستقیمه کرښه په E مستوي او د L_2 مستقیمه کرښه د F په مستوي کې پرتې وي، آیا $L_1 // L_2$ دی؟

د څپرکي مهم ټکي

1- دفضايي هندسې بنسټيز مفاهيم او اکسيومونه:

لومړنۍ اصطلاحګانې Postulates:

هغه مفاهيم او مفکورې، چې پرته له کوم تعريف څخه منل کيږي، لومړني اصطلاحات بلل کېږي د مثال په توګه. ټکی(نقطه)، کرښه (خط)، مستوي او فضا.

دليل او برهان Logical Reason:

برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کيږي چې له يو لړ مخکينيو سمو وړانديزونو او څېړونو څخه و روسته وروستيو څېړنو ته رسېږي او د هغې سموالی مخکې منل شوی وي، موږ هم کولی شو، هغه و منو.

قضيه: Theorem

هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يولړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کيږي.

ټکی(نقطه): موږ نقطه د يو ذهنې مفهوم په ډول پيژنو او هغه د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، د مېز څنډه او د خط کش تېغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي. مستقيم خط د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

د مستوي لومړی اکسيوم: هغه مستقيم خط چې د يوې مستوي دوې مختلفې نقطې سره ونښلوي، په همغه مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم: له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتې نه وي، يوه مستوي تيرېږي.

د متقاطع مستويګانو اکسيوم: که چيرې دوه مستويګانې يو ګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چيرې يو مسقيم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستويګانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم(تعريف شوې نه ده) لومړنۍ اصطلاح په توګه پېژنو.

لومړی اصل: فضا د لايتناهي نقطو مجموعه ده.

دويم اصل: لږتر لږه د فضا څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

په درې بُعده فضا کې خط او مستوي:

درې بعدي فضا: هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو درې بعدې فضا ده.

له یو بل سره په فضا کې د دوو مستقیمو خطونو نسبي حالت

موازي

منطبق

متقاطع

متنافر

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت

متقاطع

منطبق

موازي

د دوو مستویگانو نسبي حالت

منطبق

متقاطع

عمود

په فضا کې موازي مستقیمونه:

دوې مستقیمې کرښې چې په یوې مستوي کې واقع او مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستقیمونه بلل کېږي.

په فضا کې د دوو مستقیمونو تر منځ زاویه: په فضا کې دوې متوازي الاضلاع او هم جهته زاویې سره مساوي دي.

په فضا کې موازي مستقیمونه او مستوي: یو مستقیم خط له یوې مستوي سره هغه وخت موازي بلل کېږي، چې هیڅ مشترکه(گډه)نقطه ونه لري.

په فضا کې متعامد مستقیمونه او مستویگانې:

که د Δ مستقیم د (O) په نقطه کې د P پر مستوي عمود وي، ټول هغه مستقیم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تېرېږي، د Δ پر مستقیمه کرښه باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي‌گانې: دوې مستویگانې، چې هیڅ گډ ټکی ونه لري، موازي مستوي‌گانې بلل کېږي.

د څېرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب یې پیدا او کړۍ ترې تاو کړئ.

1- د P مستوي د A او B نقطې مفروض دي. که د A او B د نقطو فاصله له p مستوي سره مساوي وي، د P مستوي په هر حال کې:

a _ د AB له خط سره موازي دی　　b _ د AB خط یې له منځه تیریږي

c _ د AB خط عمودي ناصف دی　　d _ د AB له خط سره موازي دي یا له AB څخه تیریږي

2- که د Δ خط د P د مستوي په ټولو خطونو عمود وي، نو:

a _ د Δ خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.

b _ د Δ خط یوازې د P مستوي پر دوو خطونو عمود دی.

c _ د Δ خط د P مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.

d _ د Δ خط یوازې د P مستوي له یوه خط سره موازي دی.

3- په دقیق ډول له لاندې کومو اجزاوو څخه یوه مستوي نه تیریږي له:

a _ هغو درې نقطو څخه چې پر یو مستقیم واقع دی.　　b _ له دوو متقاطع خطونو څخه

c _ د یو خط او د هغې له خارجي نقطې څخه　　d _ څلور متمایزې(مختلفې نقطې)

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې هر وخت سم نه وي.

a _ که د Δ مستقیم خط د P له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه یوه مستوي تېره کړو، دا مستوي د P له مستوي سره موازي دی.

b _ که د Δ او Δ' دوه خطونه د d له خط سره موازي وي، هغه وخت Δ او Δ' یو له بل سره موازي دي.

c _ که د Δ او Δ' دوه خطونه موازي وي او د P مستوي د Δ خط قطع کړي، د Δ' خط هم قطع کولای شي.

d _ که دوې مختلفې مستوي‌گانې په یوه نقطه کې شریکې وي، نو نوموړې مستوي‌گانې د یاد شوې ټکي په امتداد شریکې دي.

5- د Δ خط د P مستوي قطع کوي، خو د P پر مستوي عمود نه دی. دا خط د P د مستوي په څو خطونو باندې عمود دی؟

$a)$ 0　　$b)$ 1　　$c)$ 2　　$d)$ بې شمېره

6- له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې هر وخت سم نه دي.

a _ که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمایز وي، نوموړی خط د هغې له مستوي سره موازي دی.

b _ که یو خط یو له متقاطع مستویګانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

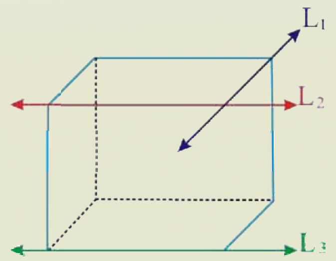
c _ که یو خط یوه له دوو موازي مستویګانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.

d _ که یوه مستوي یوه له دوو موازي مستويګانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.

لاندې سوالونه حل کړئ:

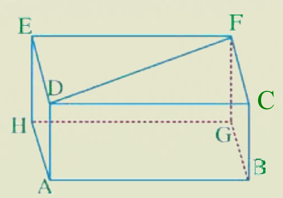
1- که دوه مستقیم خطونه له یوې مستوي سره موازي وي، نوموړي خطونه خپل منځ کې عمود کېدای شي.

2- په لاندې مستطیل کې د L_1, L_2 او L_3 خطونو موقعیت نظر یو بل ته څرګند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې یې موازي او کومې جوړې متنافرې دي؟



3- که د P_1 او P_2 مستويګانې د P پر مستوي باندې عمود وي، د P_1 او P_2 مستويګانې په خپل منځ کې موازي دي؟

4- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي یو مستطیل دی.



a _ د دوو مستويګانو نومونه واخلئ چې پر AD عمود وي او ووایئ ولې عمود دي؟

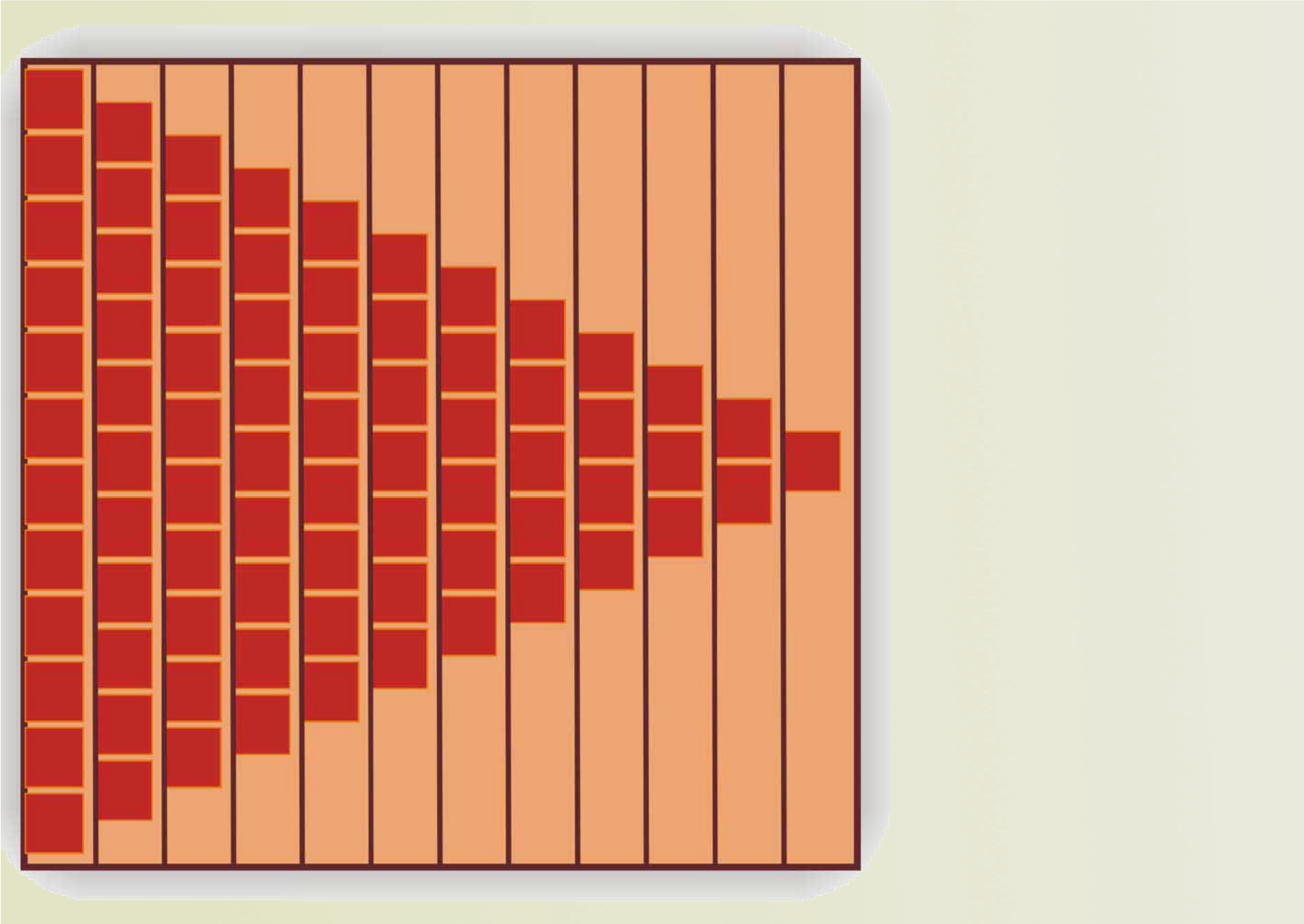
b _ د درېو قطعه خطونو، نومونه واخلئ چې پر $ABCD$ مستوي باندې عمود وي.

c _ د $E\hat{D}F$ زاویه قایمه ده.

d _ د $D\hat{F}C$ زاویه قایمه ده.

څلورم څپرکی

ترادفونه او سلسلې



ترادفونه

Sequence

په مخامخ شکل کې څه ډول ترتیب وینئ.

هر ترتیب چې شتون لري، توضیح یې کړئ.

تعریف: د $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ عددونه د عددونو د ترادف په نامه یادېږي، یا په بل عبارت ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي. غیر منظم(نامرتب) دعددونو لیکل یو ترادف نه دی.

له پورتنیو عددونوڅخه هر یو د نوموړي ترادف حدونه دی، a_1 یې لومړی حد او a_2 یې دویم حد او a_n دترادف n – ام حد دی، ترادف په لنډ ډول داسې لیکي: $\{a_n\}_{n \in IN}$ په دې حالت کې a_n د ترادف n – ام حد دی.

د جفتو عددونو ترادف	$2,4,6,8, \dots ,2n$
د طاقو عددونو ترادف	$1,3,5,7, \dots ,2n-1$
د 5 د مضرب عددونوترادف	$5,10,15,20, \dots ,5n$

معمولاً یو ترادف د یوه اختیاري n – ام حد په واسطه ټاکل او تعریفېږي؛ مثلاً:

$$a_n = 2n \quad , \quad n = 1,2,3, \dots$$
$$b_n = 2n-1 \quad , \quad n = 1,2,3, \dots$$
$$c_n = 5n \quad , \quad n = 1,2,3, \dots$$

فعالیت

- د $\{a_n\} = \{\frac{n+1}{n}\}$ ترادف په پر مختللي(انکشافي) شکل ولیکئ.
- د $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ترادف په پرمختللي(انکشافي) شکل ولیکئ.

هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول زیاتېږي متزاید ترادف بلل کېږي، لکه د جفت، طاق او 5 مضرب عددونوترادفونه.

او هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول کمېږي، متناقص ترادف بلل کېږي، لکه: د 5 مضرب عددونو معکوس ترادف $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \dots, \frac{1}{5n}$

لومړی مثال: د $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{3}{n}$ ترادفونه متزايد دی، که متناقص؟

حل:

$$a_n = n^2 \quad , \quad n = 1,2,3,\ \ldots \quad , \quad a_n = 1,4,9,16,25,36,\ \ldots$$

$$b_n = \frac{3}{n} \quad , \quad n = 1,2,3,\ \ldots \quad , \quad b_n = 3,\frac{3}{2},1,\frac{3}{4},\frac{3}{5},\ \ldots$$

ليدل کېږي چې د a_n د ترادف د حدونو عددي او عددي قيمت په تدريجي ډول زياتېږي، نو د a_n ترادف متزايد، همدارنگه ليدل کېږي چې د b_n د ترادف د حدونو عددي قيمت په تدريجي ډول کمېږي، نو د b_n ترادف يو متناقص ترادف دی.

يادونه: هغه ترادفونه چې دحدونوشمېر يې معلوم وي معين ترادفونه او هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، د غير معينو ترادفونو په نامه ياديږي.

دويم مثال: که د يوه ترادف $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ وروستي حد درکړل شوی وي، 5 لومړني حدونه يې پيدا کړئ.

حل: د 5 لومړنيو حدونو د پيدا کولو لپاره $n = 1,2,3,4,5$ قيمتونه ورکوو او په ترادف کې يې وضع کوو چې په دې ډول د ترادف 5 لومړني عناصر(حدونه) په لاس راځي.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n = 1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \quad , \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$n = 3 \quad , \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$n = 4 \quad , \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$n = 5 \quad , \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

پوښتنې

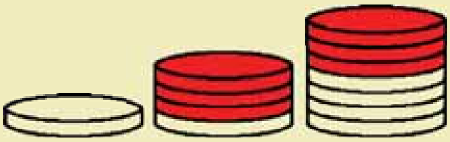
1- په لاندې ترادفونوکې $n-$ام حد وټاکئ؟

$$\left.\begin{array}{l} 1,3,5,7,\ \ldots \\ \frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9}\ ,\ \ldots \end{array}\right\}$$

2- که يو ترادف $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ راکړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه يې وليکئ.

حسابي ترادف

Arithmetic Sequences



که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې(متعاقبو) حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، ترادف په څه نوم یادېږي.

فعالیت

- مخامخ عددونه په پام کې ونیسئ $5,8,11,14,17,20$
- د لومړي او وروستي حدونو ترمنځ توپیر څو دی؟
- د پورتنیو عددونو ترتیب له څو حدونو څخه جوړ شوی دی؟
- له بنې څخه کیڼې خوا ته د پورتنیو عددونو ترادف ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله بیانېږي:

تعریف: که په یوه حسابي ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، هغه د حسابي ترادف په نوم یادېږي.

دغه ثابت عدد له ګډ توپیر(Common deference's) څخه عبارت دی او په d سره ښودل کېږي که d یو مثبت عدد($d>0$) وي، ترادف متزاید او که d منفي($d<0$) وي، ترادف متناقص بلل کېږي، لکه په لاندې مثالونو کې:

$2,5,8,11,14,17,\ \dots$

$$\left.\begin{aligned} d&=5-2=3\\ d&=8-5=3\\ d&=11-8=3 \end{aligned}\right\}\Rightarrow\ d=3>0$$

نو ترادف متزاید دی.

$4, 0, -4, -8, -12, -16, -20, \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} d = 0 - 4 = -4 \\ d = -4 - 0 = -4 \\ d = -8 - (-4) = -4 \\ d = -12 - (-8) = -4 \\ d = -16 - (-12) = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow d = -4 < 0$$

ترادف متناقص دی.

لومړی مثال: داسې یو ترادف ولیکئ چې لومړی حد یې $\frac{3}{2}$ او ګډ توپیر یې 2 وي.

حل: څرنګه چې لومړی حد یې $a_1 = \frac{3}{2}$ او ګډ توپیر یې $d = 2$ دی، نو:

$a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$

$a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = a_1 + d$

$a_3 - a_2 = d \Rightarrow a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$

$a_4 - a_3 = d \Rightarrow a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$

اوس د $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n$ قیمتونه په ترادف کې وضع کوو:

$a_1 , (a_1 + d) , (a_1 + 2d) , (a_1 + 3d), \ldots$

$\frac{3}{2} , (\frac{3}{2} + 2) , (\frac{3}{2} + 2 + 2) , (\frac{3}{2} + 2 + 2 + 2), \ldots$

$\frac{3}{2} , \frac{7}{2} , \frac{11}{2} , \frac{15}{2}, \ldots$

دویم مثال: کوم یوله لاندې ترادفونو څخه حسابي ترادف دی.

$a)\ 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ldots$

$b)\ 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

د a جزء حل: د حسابي ترادف د تعریف په پام کې نیولو سره د حدونو ګډ توپیر په لاس راوړو:

$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$

$d = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$d = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$$d = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$
$$d = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$
$$d = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو حدونو تر منځ ګډ توپیر $\frac{1}{2}$ ثابت عدد دی، نو د حسابي ترادف د تعریف پر بنسټ ویلی شو چې نوموړی ترادف یو حسابي ترادف دی.

د b جزء حل:

$1 \ , \ 2 \ , \ 4 \ , \ 8 \ , \ 16$

$d = 2 - 1 = 1$

$d = 4 - 2 = 2$

$d = 8 - 4 = 4$

$d = 16 - 8 = 8$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو عناصرو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد نه دی، نو یاد شوی ترادف حسابي ترادف نه دی.

په یوه حسابي ترادف کې د n-ام حد ټاکل:

که چیرې د یوه حسابي ترادف $a_1, a_2, \ ... \ , a_n$ لومړی حد په a او ګډ توپیر یې d وي، د n-ام حد د پیداکولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه ګټه اخلو، ددې کار لپاره د $5, 7, 9, 11, \ ...$ ترادف په پام کې نیسو.

$5, 7, 9, 11, \ ...$

$d = 7 - 5 = 2$

$a_1, a_2, a_3, \ ...$

$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), (a_1 + 3d), \ ...$

$5, 5 + 2, 5 + 2 \cdot 2, 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \ ...$

$a_1 = 5, \ a_2 = 5 + 2 \cdot 2 \ , \ a_3 = 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \ ...$

د پورتني مثال په پام کې نیولو سره په عمومي توګه کولای شو ولیکو چې:

$$\begin{aligned}
&a_1 = a_1\\
&a_2 - a_1 = d \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 + d\\
&a_3 - a_2 = d \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d\\
&a_4 - a_3 = d \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d\\
&\vdots\\
&a_n - a_{n-1} = d \quad \Rightarrow \quad a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d
\end{aligned}$$

لومړی حد	دویم حد	دریم حد	څلورم حد		n - ام حد
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	....	$a+(n-1)d$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4		a_n

په پایله کې په لاس راځي چې د a , d , n او a_n ترمنځ لاندې اړیکه شتون لري:

$$a_n = a + (n-1)d$$

لومړی مثال: د دغه -2 , 5 , 12 , . . . حسابي ترادف 30 - ام حد پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1 = -2\\
&d = 5 - (-2) = 7\\
&n = 30\\
&a_{30} = ?
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&a_n = a + (n-1)d\\
&a_{30} = -2 + (30-1)7\\
&a_{30} = -2 + 29\cdot 7\\
&a_{30} = -2 + 203 \Rightarrow a_{30} = 201
\end{aligned}$$

دویم مثال: دلاندې حسابي ترادف د حدونو شمېر په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$35\ ,\ 40\ ,\ 45\ , \ldots ,2000$$

$$\left.\begin{aligned}
&a = 35\\
&d = 40 - 35 = 5\\
&a_n = 2000\\
&n = ?
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&a_n = a + (n-1)d\\
&2000 = 35 + 5n - 5\\
&2000 = 30 + 5n\\
&2000 - 30 = 5n\\
&1970 = 5n \quad \Rightarrow \quad n = 394
\end{aligned}$$

فعالیت

- که چیرې په یوه حسابي ترادف کې $d=4, a_1=-11$ وي، a_2 او a_3 حدونه پیداکړئ.

د حسابي ترادف وسطي حد:

که د یوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدونه د a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ولرو، په داسې حال کې چې $n=2,3,4$ دی.

$$a_{n-1}+a_{n+1}=[a_1+(n-2)d]+[a_1+nd]$$
$$=[a_1+nd-2d]+[a_1+nd]=[a_1+nd-2d+a_1+nd]$$
$$a_{n-1}+a_{n+1}=[2a_1+2nd-2d]=2[a_1+(n-1)d]=2a_n$$
$$\Rightarrow\ 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}\quad\Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

لومړی مثال: د 7 او 23 عددونو حسابي اوسط عبارت دی، له:

$$a_n=\frac{7+23}{2}=\frac{30}{2}=15$$

دویم مثال: د x عدد داسې وټاکئ چې د $\underbrace{2x+1}_{a_{n+1}},\underbrace{2x-4}_{a_n},\underbrace{3x+3}_{a_{n-1}}$ درې حده حسابي ترادف تشکیل کړي، ترادف یې ولیکئ.

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\quad\Rightarrow 2x-4=\frac{3x+3+2x+1}{2}=\frac{5x+4}{2}$$
$$4x-8=5x+4\quad\Rightarrow 4x-5x=4+8=12\quad\Rightarrow -x=12$$
$$x=-12$$

ترادف یې عبارت دی له: $2(-12)+1\quad,\quad 2(-12)-4\quad,\quad 3(-12)+3$

$$-24+1,-24-4,-36+3\ \Rightarrow -23,-28,-33,-38,-43,\ ....$$

یادونه

که د یوه حسابي ترادف $n-$ ام او $m-$ ام حدونه معلوم وي، یعنې:

$$a_n=a+(n-1)d\quad .... I$$
$$a_m=a+(m-1)d\quad .... II$$

نو د I له اړیکې څخه د II اړیکه کموو، په پایله کې کولای شو ګډ توپیر داسې په لاس راوړو $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$ (ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده) چې په یاد شوي فورمول کې d ګډ توپیر، a_n د ترادف $n-$ام حد، a_m د ترادف $m-$ام حد دی.

لومړی مثال: د يوه حسابي ترادف پنځم حد 27 او نهم حد يې 47 دی، ګډ توپير او لومړی حد يې پیدا کړئ، په پای کې يې ترادف بشپړ کړئ.

$\square, \square, \square, \square, 27, \square, \square, \square, 47$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 47 \\ n = 9 \\ a_m = 27 \\ m = 5 \\ d = ? \\ a = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} d = \frac{a_n - a_m}{n-m} = \frac{47-27}{9-5} = \frac{20}{4} \\ d = 5 \\ a_n = a + (n-1)d \quad \Rightarrow \; 47 = a + (9-1)5 = a + 40 \\ \Rightarrow \quad 47 - 40 = a \quad \Rightarrow \; a = 7 \end{array}$$

ترادف يې عبارت دی له: $7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47$

هارمونيکي ترادف: د $\{a_n\}$ يوه ترادف ته هغه وخت هارمونيکي ترادف وايي چې معکوس يې $b_n = \frac{1}{a_n}$ يو حسابي ترادف وي.

لومړی مثال: **د** $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ ترادف يو حسابي ترادف دی، ځکه چې $d = 2$ دی، د دغه ترادف د حدونو معکوس يعنې $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots$ يو هارمونيکي ترادف تشکيلوي.

دويم مثال: د طبيعي عددونو معکوس ترادف يو هارمونيکي ترادف دی.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ \ldots \ , \frac{1}{n}$$

$$\{a_n\} = \frac{1}{n}$$

دریم مثال : که چیرې په یوه هارمونیکې ترادف کې $a_1=\frac{1}{4}$ او $d=-3$ وي، هارمونیکې ترادف یې په لاس راوړئ

حل:

$$\frac{1}{4},(\frac{1}{4}-3),(\frac{1}{4}-3-3),(\frac{1}{4}-3-3-3),(\frac{1}{4}-3-3-3-3),\ldots$$

$$\frac{1}{4},-\frac{11}{4},-\frac{23}{4},-\frac{35}{4},-\frac{47}{4},\ldots$$

آیا د طبیعي طاقو عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی، $n-$ ام حد یې ولیکئ.

هارمونیکي حسابي اوسط: که درې مسلسل عناصر a_{n-1} ، a_n او a_{n+1} په داسې حال کې چې $n=2,3,4\ldots$ دی، له یوه حسابي ترادف څخه وټاکل شي، څرنگه چې $\frac{1}{a_{n-1}},\frac{1}{a_n}$ او $\frac{1}{a_{n+1}}$ د یوه هارمونیک ترادف حدونه دي لرو، چې:

$$\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2}=\frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2a_{n+1}\cdot a_{n-1}}$$

$$a_n=\frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

په پایله کې پورتنی اړیکه چې هارمونیک حسابي اوسط ښیي، لیکلای شو:

$$\boxed{a_n=\frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}}$$

مثال : د 2 او 8 عددونو هارمونیکي اوسط پیدا کړئ.

حل: له $a_n=\frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ فارمول څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$a_n=\frac{2(2\cdot8)}{2+8}=\frac{2\cdot16}{10}=\frac{16}{5}=3.2$$

پوښتنې

1- د مخامخ ترادف 35 -ام حد پیدا کړئ. $-2\ ,\ 5\ ,\ 12\ ,\ \ldots$

2- آیا $\frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4}$ یو حسابي ترادف تشکیلوي؟ د پوښتنې د سموالی په صورت کې یې مشترک توپیر پیدا کړئ.

3- د $2\sqrt{2}$ او $16\sqrt{2}$ تر منځ حسابي اوسط په لاس راوړئ.

4- که $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_{10} = \frac{84}{2}$ وي د d قیمت په لاس راوړئ.

5- له لاندې ترادفونو څخه کوم یو حسابي ترادف نه دی.

$a)\ 2\ ,\ \frac{9}{4}\ ,\ \frac{5}{2}\ ,\ \frac{11}{4}, \ldots$

$b)\ 3\ ,6\ ,9\ ,12,\ \ldots$

هندسي ترادف

Geometric Sequences

که د شطرنج د يوې تختې په لومړۍ خانه کې يوه دانه غنم او په دويمه خانه کې يې دوه دانې غنم په همدې ډول که په هره وروستی خانه کې په مخکنی خانې دوه برابره غنم کېښودل شي، نو د شطرنج د تختې په اخيره خانه کې(يوه د شطرنج تخته 64 خانې لري) به څو دانې غنم وي.

فعاليت

- د مخامخ ترادف عددونه په پام کې ونيسئ. $3\,,\ 6\,,\ 12\,,\ 24\,,\ 48, \ldots$
- د پورتني ترادف د عناصرو ترمنځ کومه اړيکه موجوده ده؟
- د پورتني ترادف د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه کولای شو لاندې پايله بيان کړو:

پايله

هغه ترادف چې د دوو پر له پسې حدونو ترمنځ نسبت يې يو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه ياديږي، يعنې:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q \quad , \ n = 1,2,3, \ \ldots$$

$$a_{1+1} = a_1 \cdot q \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_{3+1} = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

دلته q ګډ نسبت او a_1 د ترادف لومړی حد دی.

هندسي ترادف هغه وخت پېژندل کېږي چې لومړی حد او ګډ نسبت يې معلوم وي.

لومړی مثال: د $\ldots, 6, 12, 24, 48, 96$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ ،ګډ نسبت یې په لاس راوړی.

حل: هر حد یې په مخکیني حد باندي ویشو:

$$96 \rightarrow 48 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6$$

$$q=\frac{48}{96}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{24}{48}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{12}{24}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

فعالیت

- په یوه هندسي ترادف کې $a_1=2$ او $q=3$ دی، a_2 , a_3 او a_4 حدونه پیدا کړئ.

یادونه

$q>1$ لپاره ترادف متزاید دی.

$q<1$ لپاره ترادف متناقص دی.

$q=1$ لپاره ثابت ترادف په لاس راځي.

دویم مثال: د $100, 300, 900, 2700, \ldots$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ لومړی حد او ګډ نسبت یې په لاس راوړئ او وواياست چې پورتنی هندسي ترادف متزاید دی او که متناقص.

حل:

$$\text{لومړی حد} = a = 2700$$

$$\text{ګډ نسبت} = q = \frac{900}{2700}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$$

په پورتني مثال کې $q=\frac{1}{3}<1$ دی، نو نوموړی ترادف متناقص دی.

په هندسي ترادف کې د n – ام حد پیدا کول:

که په یوه هندسي ترادف کې a لومړی حد، q ګډ نسبت او n د ترادف د حدونو شمېر وي،نو د n – ام حد پیداکولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه کار اخلو.

که چیرې هندسي ترادف د .... $a_1, a_2, a_3, a_4,$ په پام کې ونیسو، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$a_1 = a_1$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1}$$

اوس د .... $a_1, a_2, a_3, a_4,$ په ترادف کې یې قیمتونه ږدو:

لومړی حد	دویم حد	دریم حد	څلورم حد		n - ام حد
a_1	a_2	a_3	a_3	, ... ,	a_n
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	, ... ,	$\downarrow$
a_1	$a_1 q$	$a_1 q^2$	$a_1 q^3$	, ... ,	$a_1 q^{n-1}$

یعنې په هندسي ترادف کې n – ام حد یا عمومي حد، د دغې اړیکې $a_n = a \cdot q^{n-1}$ په واسطه پیدا کېږي.

لومړی مثال: د لاندې هندسي ترادف شپږم حد پیدا کړئ.

$$5\,,\,-10\,,20\,,-40\,,\,........$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a=5 \\ q=\dfrac{-10}{5}=-2 \\ n=6 \\ a_6=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_6=5(-2)^{6-1} \\ a_6=5(-2)^5 \Rightarrow a_6=5(-32) \\ a_6=-160 \end{array}$$

دویم مثال: **د** .... , 2 , 4 , 8 هندسي ترادف دوولسم حد په لاس راوړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=12 \\ a=8 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_{12}=8(\dfrac{1}{2})^{12-1}=8(\dfrac{1}{2})^{11}=8\dfrac{1}{2^{11}} \\ a_{12}=\dfrac{8}{2^{11}}=\dfrac{2^3}{2^{11}}=2^{3-11}=2^{-8}=\dfrac{1}{2^8}=\dfrac{1}{256} \end{array}\right.$$

د هندسي ترادف وسطي حد:

که a, M, b د هندسي ترادف پر له پسې حدونه وي، د $M,\ a$ او M, b ترمنځ اړیکه پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} q=\dfrac{M}{a} \\ q=\dfrac{b}{M} \end{array}\right\} q=q \Rightarrow \frac{M}{a}=\frac{b}{M} \Rightarrow M^2=a\cdot b$$

$$M=\sqrt{a\cdot b}$$

له پاسني فورمول څخه ویلی شو که چیرې a او b دوه مثبت حقیقي عددونه وي، نو د M حقیقي مثبت عدد ته د a او b هندسي اوسط(Geometric mean) وايي.

دریم مثال: د 3 او 12 عددونو هندسي وسط پیداکړئ.

حل:

$$\left.\begin{matrix} a=3 \\ b=12 \end{matrix}\right\} M=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$$

$$M=6$$

څلورم مثال: د $32, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 2$ هندسي ترادف نا معلوم حدونه پیداکړئ.

حل:

$$\left.\begin{matrix} a_1=2 \\ n=5 \\ a_5=32 \\ q=? \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a_5=a\cdot q^{n-1} \quad \Rightarrow 32=2q^{5-1} \Rightarrow 32=2q^4 \\ q^4=\dfrac{32}{2}=16 \quad \Rightarrow q^4=16 \quad \Rightarrow q^4=2^4 \Rightarrow \boxed{q=2} \end{matrix}$$

$a_1=2$

$a_2=a_1\cdot q=2\cdot 2=4$

$a_3=a_2\cdot q=a_1q^2=2\cdot 2^2=8$

$a_4=a_3\cdot q=a_1\cdot q^3=2\cdot 2^3=16$

نو هندسي ترادف یې عبارت دی له: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 یا $2,4,8,16,32$

فعالیت

- که په هندسي ترادف کې a_n، n–ام حد، n د ترادف د حدونو شمېر او q ګډ نسبت وي، د q لپاره عمومي فورمول پیداکړئ.

لومړی مثال: x داسې وټاکئ چې له لاندې حدونو څخه یو هندسي ترادف جوړ شي.

$x-1 \;,\; x+3 \;,\; x+1$

$M=\sqrt{a\cdot b} \Rightarrow (x+3)=\sqrt{(x-1)(x+1)} \Rightarrow (x+3)^2=(x-1)(x+1)$

$x^2+6x+9=x^2-1 \Rightarrow 6x+10=0 \;,\; x=-\dfrac{10}{6}=-\dfrac{5}{3}$

$x=-\dfrac{5}{3}$

پوښتنې

1- د هندسي ترادف 5 حدونه داسې وليکئ چې لومړی حد یې 5 او اخیري حد یې $\frac{5}{16}$ وي.

2- کوم یو له لاندې ترادفونو څخه هندسي ترادف دی.

$a)\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ ...$

$b)\ -4,-2,0,2,4,\ ...$

3- د $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \ldots$ هندسي ترادف دوولسم حد پیدا کړئ.

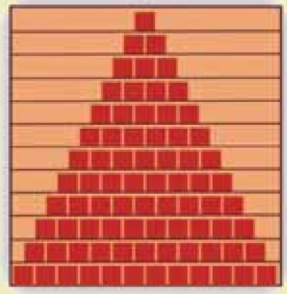
4- د $\sqrt{3}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{4}$ هندسي وسط په لاس راوړئ.

5- د $27, ?, ?, ?, \frac{1}{3}$ حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

د ترادفونو قسمي مجموعه

a - په لسم کتار کې د قوطيو شمېر څو دی؟

b - په الماری کې د ټولو قوطيو شمېر پيدا کړئ؟



فعاليت

- د $2,4,6,8,\ \ldots$ ترادف په پام کې ونيسئ.
- د دويم او دريم حدونو د جمعې حاصل وليکئ.
- د لس لومړيو حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.
- د $n-$ام حد د جمعې حاصل وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانېږي:

څرنګه چې د لومړي n حدونو د جمعې حاصل مشکل دی چې ټول n حدونه يې وليکو، نو ځکه يې دوه يا درې لومړي حدونه ليکو او وروسته له دريو ټکو $n-$ ام حد ليکو.

څرنګه چې يو ترادف د بې نهايت حدونو لرونکی دی، که د زياتو حدونو د جمعې حاصل، لکه: 100 , 1000 او داسې نورو حدونو په پام کې وي، نو د جمعې حاصل يې سرخوږي جوړوي.

په عمومي ډول د ترادف n لومړيو حدونو $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots\ ,a_n$ د جمعې حاصل په لاندې ډول ليکو:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

د اسانتيا او لنډيز لپاره په محاسبو کې د $\sum$ له سمبول څخه کار اخلي.

د $\sum$ پورتنی او ښکتنی نښې دا راښيي چې i له 1 څخه تر n پورې ټول تام عددونه اخلي، i د انډکس په نامه يادېږي. د يوې مجموعې د انډکس لپاره هر حرف کارول کېږي، خو د $i\ ,n,k\ ,\ j$ حروف ډېر معمول دي.

مثلاً: $\sum_{k=1}^{n}2k=\sum_{i=1}^{n}2i=\sum_{j=1}^{n}2j=2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+\cdot\cdot\cdot+2n$

لومړی مثال: لاندې مجموع($\sum_{i=1}^{7}$) په غزيدلي شکل وليکئ.

حل: $\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{i}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{1089}{420}$

دويم مثال: لاندې د جمعې حاصل د مجموعې ($\sum$) په شکل وليکئ.

$a)\ 1+3+5+7+\ \dots\ +(2n-1)$

$b)\ 1+4+9+\ \dots\ +n^2$

د a جزء حل:

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

د b جزء حل:

$$1+4+9+\ \dots\ +n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2$$

دريم مثال: لاندې مجموعه په پرمختللي(غزيدلي) شکل وليکئ.

$$\sum_{i=4}^{n}i(i+2)=?$$

حل:

$$\sum_{i=4}^{n}i(i+2)=4(4+2)+5(5+2)+6(6+2)+7(7+2)+\dots+n(n+2)$$
$$=4\cdot 6+5\cdot 7+6\cdot 8+\dots+n(n+2)$$
$$=24+35+48+63+\dots+n(n+2)$$

څلورم مثال: د دغې مجموعې $\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}$ حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}=\frac{7+1}{7-1}+\frac{8+1}{8-1}+\frac{9+1}{9-1}+\frac{10+1}{10-1}=\frac{8}{6}+\frac{9}{7}+\frac{10}{8}+\frac{11}{9}$$
$$=\frac{4032+3888+3780+3696}{3024}=\frac{15396}{3024}=\frac{5132}{108}$$

تر اوسه مو یوازې د یوه ترادف د n حدونو د جمعې حاصل وڅېړل، که وغواړو د یوه ترادف $\{a_n\}_{n\in IN}$ د ټولو حدونو د جمعې حاصل پیدا کړو، په دې صورت کې لیکو:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}a_i$$

په دې حالت کې i ټول طبیعي عددونه اخېستلای شئ.

د $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ سلسله د بې نهایت سلسلې(Series) په نامه یادېږي.

د $a_1+a_2+a_3+\ldots$ عددونه د سلسلې حدونه او a_n د سلسلې $n-$ام حد یا دسلسلې عمومي حد بلل کېږي.

څرنګه چې موږ نشو کولای، د عددونو بې نهایت شمېر جمع کړو، خوبه ریاضي کې د ځینو قاعدو په کارولوسره کولای شو، یوې سلسلې ته دیوې مجموعي نسبت ورکړو، خو دلته غواړو د یوې سلسلې د n حدونو مجموعه پیدا کړو.

د یوې سلسلې د n لومړیو عناصرو مجموعه $\sum_{i=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ د نومورې سلسلې د n حدونو د قسمي مجموعې په نامه یادېږي، که هغه په S_n وښیو، نو لرو: .

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_k$$

مثال: د $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ سلسلې S_6 او S_8 حساب کړئ.

حل:

$$S_6=1+2+3+4+5+6=21$$
$$S_8=1+2+3+4+5+6+7+8=36$$

که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ او $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دوي سلسلې او c يو ثابت عدد وي لاندې، خاصيتونه د قسمي مجموعو لپاره سم دي:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ ... \ + c = nc$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

پوښتنې

1. لاندې مجموعې حساب کړئ.

$a)\ \sum_{i=1}^{6} \sqrt{i}$ $\qquad b)\ 3\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$ $\qquad c)\ \sum_{k=1}^{3} (4k^2 - 3k)$

2. لاندې مجموعې د $\sum$ په شکل کې وليکئ.

$a)\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{19}{20}$

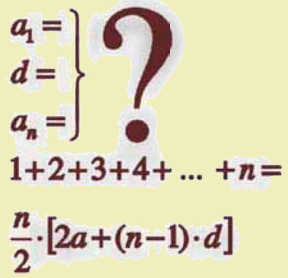
$b)\ 1 + 4 + 9 + ... + n^2$

$c)\ 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1)$

3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

$a)\ \sum_{i=4}^{n} i(i+2)$ $\qquad b)\ \sum_{i=1}^{n} (3i-2)$ $\qquad c)\ \sum_{i=1}^{n} (2+5i)$

د حسابي ترادف د n لومړیو حدونو قسمي مجموعه



که $a_1 , a_2 , a_3 ,\ldots ,a_n$ یو حسابي ترادف وي، نو $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ د یوې حسابي سلسلې قسمي مجموعه کیدلای شي؟

که چیرې دیوه حسابي ترادف د حدونو ترمنځ د جمعې نښه وي، هغې ته حسابي سلسله ویل کېږي. یا په بل عبارت د یوه حسابي ترادف د جمعې حاصل ته حسابي سلسله وایي.

په یوه حسابي ترادف کې چې لومړی حد یې a ګډ فرق یې d او اخیري حد یې a_n وي، د حدونود جمعې لپاره عمومي فورمول داسې په لاس راوړو:

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \ \ldots \ \mathrm{I}$$

$$S = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + (a_n - 3d) + \ldots + (a + 2d) + (a + d) + a \ \ldots \ \mathrm{II}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا جمع کوو:

$$2S=\underbrace{(a+a_n)+(a+a_n)+(a+a_n)+(a+a_n)+\ldots+(a+a_n)+a+a_n}_{n(a+a_n)\ \text{خلي}\ n}$$

$$2S=n(a+a_n) \quad \Rightarrow S=\frac{n}{2}(a+a_n)\ldots\mathrm{I}$$

د I فورمول د حسابي سلسلې جمع راښیي چې لومړی حد، اخیري حد اود جملاتو شمېر یې معلوم وي.

لومړی مثال: د حسابي سلسلې د جمعې حاصل په لاس راوړئ، داسې چې $a_n = 25, a = 4$ او د حدونو شمېر يې 8 وي.

حل:

$$a = 4$$

$$a_n = 25 \qquad S = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

$$n = 8 \qquad S = \frac{8}{2}(4 + 25) \Rightarrow S = 4(29) = 116$$

که چېرې په يوه حسابي سلسله کې لومړی حد، د حدونو شمېر او ګډ توپير ورکړل شوی وي، د جمعې حاصل يې له لاندې اړيکې څخه په لاس راځي:

$$S = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$S = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] \Rightarrow S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \text{ .... III}$$

دويم مثال: د لاندې سلسلې د 201 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

$$7 + 11 + 15 + \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{aligned} a &= 7 \\ d &= 4 \\ n &= 201 \\ S_{201} &= ? \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ &S_{201} = \frac{201}{2}[2 \cdot 7 + (201-1)4] \\ &S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 200 \cdot 4) \quad \Rightarrow \quad S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 800) = \frac{201}{2} \cdot 814 \\ &S_{201} = 81807 \end{aligned}$$

فعالیت

- د طبیعي عددونو سلسله په پام کې ونیسئ لومړی حد، ګډ تـوپیر او n – ام حد یې ولیکـئ وروسـته د مسلسلو طبیعي عددونو د جمعې دحاصل عمومي فورمول په لاس راوړئ.

په یاد ولرئ: د طبیعي جفت پر له پسې عددونو د جمعې حاصل هم یوه حسابي سلسله ده چې فورمول یـې په لاندې ډول په لاس راوړو: $2+4+6+8 \ \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ d=2 \\ n=n \\ S_n=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \\ S_n=\frac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)2] \\ S_n=\frac{n}{2}[4+2n-2]=\frac{n}{2}(2+2n) \quad \Rightarrow \quad S_n=n(n+1) \end{array}$$

دریيم مثال: د جفتو پر له پسې عددونو د سلسلې $(2+4+6+8+\ldots)$ د 200 حدونو د جمعې حاصـل په لاس راوړئ:

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=200 \\ S_{200}=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=n(n+1) \\ S_{200}=200(200+1) \quad \Rightarrow \quad S_{200}=200(201) \\ S_{200}=40200 \end{array}$$

فعالیت

- د طبیعي طاقو پرله پسې عددونو د حسابي سلسلې د جمعې حاصل فورمول پیدا کړئ.

او د طبیعي پرله پسې عددونو د جمعې حاصل د $S=\frac{n}{2}(n+1)$ فورمول په واسطه محاسبه کېږي(د پورتـه فورمولونو ثبوت د زده‌کوونکو دنده ده).

پوښتنې

1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او $n-$ ام حدونه پیدا او همدرانګه د نوموړو ترادفونو د لس حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$i)\ 2,0,-2,-4,\ \ldots$

$ii)\ 1,5,9,13,\ \ldots$

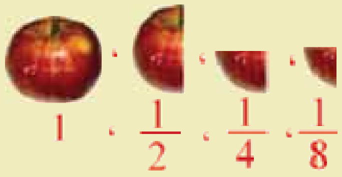
$iii)\ -2,-1,0,1,2,\ \ldots$

2. که یو ترادف د $2,5,8,11,\ \ldots$ په ډول راکړل شوی وي. د لاندې مجموعو قیمتونه حساب کړئ.

$a)\ S_8$ $b)\ S_{10}$

د یوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل

که چیرې یوه مڼه نیمه او نیمه بیا نیمه او همداسې ادامه ورکړو یو هندسي ترادف په لاس راځي، له لومړی برخې نیولې، څو برخې سره جمع کړو چې د جمعې حاصل مساوي په 2 مڼو شي.



فعالیت

- یو هندسي ترادف چې لومړی جمله یې a_1 او د دوو پرله پسې جملو ترمنځ نسبت یې مساوي په q راکړل شوی وي، لاندې فعالیت سرته ورسوئ.
- د ترادف دویمه جمله څو ده؟
- که چیرې دو یمه جمله په q کې ضرب شي، دضرب حاصل یې له دریمې جملې سره پرتله کړئ.
- د ترادف د n جملو د جمعې حاصل د فورمول پیداکولو لپاره څه وړاندیز لرئ؟

پایله:

په یوه هندسي ترادف کې هر راتلونکی حد د مخکیني حد له ضرب څخه په q کې، په لاس راځي. دا خبره د ټولو حدونو لپاره یوه باوري خبره ده، په دې ډول د یوه هندسي ترادف $\{a_n\}$ د n جملو د جمعې د حاصل $(S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ قیمت عبارت دی، له: $q \neq 1$, $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

د پورتنی اړیکې ثبوت کولای شو په اسانی سره په لاس راوړو:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ \ldots \ + a_1q^{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ I$$

$$S_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ \ldots \ + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad \ldots\ldots\ldots \ II$$

له I اړیکې څخه د II اړیکه کموو:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)} \quad , \quad q \neq 1$$

پاسنی اړیکه هغه اړیکه ده، چې د هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل په لاس راکوي.

لومړی مثال: په یوه هندسي ترادف کې لومړی حد $a_1 = 2$ او ثابت نسبت $q = \frac{1}{2}$ دی.
د پاسني ترادف 5 لومړی متوالي حدونه او د لسو جملو د جمعې حاصل پیداکړئ.
حل: پوهېږو چې $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ده، نو:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \\ S = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} a_1 = 2(\frac{1}{2})^0 = 2 & a_4 = 2(\frac{1}{2})^{4-1} \\ a_2 = 2(\frac{1}{2}) = 1 & a_4 = 2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4} \\ a_3 = 2(\frac{1}{2})^{3-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} & a_5 = 2(\frac{1}{2})^4 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{array}$$

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{2-1}{2}} = 2\frac{\frac{1024-1}{1024}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 2\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4092}{1024} = 3.99609375$$

دویم مثال: د لاندې هندسي ترادف د څو جملو مجموعه 80 کېږي؟

$2, 6, 18, \ldots$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{6}{2} = 3 \\ n = ? \\ S = 80 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{a(q^n-1)}{q-1} \\ 80 = \frac{2[(3)^n-1]}{3-1} \\ 80 = (3)^n - 1 \Rightarrow 80+1 = (3)^n \\ 81 = 3^n \Rightarrow (3)^4 = 3^n \\ \Rightarrow n = 4 \end{array}$$

یعنې د پاسني هندسي ترادف د 4 جملو مجموعه 80 کېږي.

پوښتنې

1. په $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
2. د $3, 6, 12, \ldots, 384$ هندسي ترادف د حدونو شمېر او مجموعه پیداکړئ.
3. په $4, 12, 36, \ldots$ ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کېږي، د $n-$ام حد قیمت پیداکړئ.

لایتناهي هندسي سلسلې

که د ترادف جملو ته په غور پاملرنه وکړو، په اسانی لیدل کېږي چې ترادف، جمله په جمله کوچنی کېږي.
أیا هر هندسي ترادف یوه عدد ته نږدې کېږي؟

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}\ ,\ |q|<1$$

که چیرې په یوه هندسي سلسله کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر یې معلوم نه وي، هغه د متباعدې سلسلې(Divergent series) په نامه یادېږي.

او که چیرې $|q| < 1$ وي، هغه د متقاربې سلسلې(Convergent series) په نامه یادېږي. د متقاربو او متباعدو سلسلو د جمعې حاصل د پیداکولو فورمول:

$$S = a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{-(q^n-1)}{-(q-1)} = a(\frac{q^n-1}{q-1})$$

که سلسله متباعد $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر بې نهایت وي، یعنې $n \to \infty$ نو پوهېږو چې:

$$S_\infty = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{\infty - a}{q-1} = \infty \Rightarrow S_\infty = \infty$$

که سلسله متقارب ($|q|<1$) او د جملو شمېر بې نهایت وي، نو $q^n \to 0$ کوي.

$$S = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a-a\cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

یعنې که سلسله متقارب($|q|<1$) او د جملو شمېر یې بې نهایت وي، د نوموړې سلسلې د جمعې حاصل عبارت دی له: $S_\infty = \dfrac{a}{1-q}$

لومړی مثال: د $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ سلسلې د جمعې حاصل محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a=1$, $q=\frac{1}{2}$ دی، څرنګه چې $|q|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=2$$

دویم مثال: که په یوه هندسي سلسله کې $a_1=27$ او $q=\frac{1}{3}$ وي، د سلسلې دحدونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $|q|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ =\frac{a}{1-q}$$

$$27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots=\frac{27}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{\frac{3-1}{3}}=\frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$27\cdot\frac{3}{2}=\frac{81}{2}=40.5$$

دریم مثال: $0.6\overline{23}$ پیریودیک(متوالي) اعشاري کسر په عام کسر واړوئ.

حل: دا عدد کولای شو په لاندې ډول په هندسي ترادف واړوو.

$$0.6\overline{23}=0.6232323\ldots=0.6+0.023+0.00023+0.0000023+\ \ldots$$
$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\frac{23}{10000000}+\ \ldots$$
$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{10000})+\ \ldots\ ]$$

په پاسنی سلسله کې $a=1$ او $|q|=\left|\frac{1}{100}\right|=\frac{1}{100}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{100})^2+...]$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{100}{99}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{6}{10}+\frac{23}{990}=\frac{594+23}{990}=\frac{617}{990}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{617}{990}$$

څلورم مثال: د $0.\overline{3}$ متوالي اعشاري کسر د هندسي سلسلې په کارولو سره په عام کسر واړوئ.

حل: پوهېږو چې:

$$0.\overline{3}=0.3333\,...\;=0.3+0.03+0.003+0.0003+\;...$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\;...$$

$$=\frac{3}{10}[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\;...\;]$$

لیدل کېږي چې په پاسنی سلسله کې $a=1$ او $|q|=\left|\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$0.\overline{3}=\frac{3}{10}\cdot\frac{a}{1-q}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{10-1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\;\;\Rightarrow\;0.\overline{3}=\frac{1}{3}$$

پوښتنې

1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

$i)\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots$, $ii)\ 5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots$

2. لاندې اعشاري پيريوديک(متوالي) کسرونه په عام کسر واړوئ.

$a)\ 0.2\overline{4}$ $b)\ 0.\overline{5}$

د څلورم څپرکي مهم ټکي

د ترادف تعریف: $a_1, a_2, a_3, \ \dots \ , a_n$ د عددونو د ترادف په نامه یادېږي.

پاسنی هر یوه عدد ته د ترادف حد یا جمله وایي، a_1 د ترادف لومړی حد او a_n د ترادف $n-$ام حد دی یا په بل عبارت، ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي.

حسابي ترادف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد وي، نو نوموړی ترادف د حسابي ترادف په نامه یادېږي.

د حسابي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n+1}, a_n, a_{n-1} ولرو، نو: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

په حسابي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول $a_n = a + (n-1)d$

هندسي ترادف: هغه ترادف چې د هغه د هر حد او مخکیني حد تر منځ نسبت یو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه یادېږي، په هندسي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول: $a_n = aq^{n-1}$

د هندسي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n+1} , a_n , a_{n-1} په داسې حال کې چې $n = 2, 3, 4, \ \dots$ هندسي ترادف حدونه وي، نو د ترادف وسطي حد عبارت له: $a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$

د ترادفونو قسمي مجموعه: $a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots \ + a_n = \sum_{1=1}^{n} a_i$ د بې نهایت سلسلې (Series) په نامه یادېږي.

او د $\sum_{k=1}^{n} a_k = \ \dots + \ \ a_1 + a_2 + a_3 +$ د نوموړې $n-$ام سلسلې د جمعې قسمي حاصل دی.

د حسابي ترادف د n لومړیو حدونو قسمي حاصل جمع: $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

د هندسي ترادف د n لومړیو جملو قسمي حاصل جمع: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

بې نهايت هندسي سلسلې: په يوه هندسي سلسله کې که $|q| < 1$ وي، سلسله متقارب او د n جملو د جمعې حاصل يې د $\frac{a}{1-q}$ عدد ته نږدې کېږي او قيمت يې د دغه فورمول $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$ په واسطه محاسبه او لاسته راځي.

هغه هندسي سلسله چې په هغې کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر يې هم بې نهايت وي، سلسله متباعد او د n لومړيو جملو مجموعه يې هم بې نهايت ده، يعنې $S_n = \infty$

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې پيدا او له هغه څخه کړۍ تاو کړئ.

1. د $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ ترادف $n-$ام حد کوم دی؟

$a)\ \frac{\sqrt{n}-1}{n}$ $\quad b)\ \frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ $\quad c)\ \frac{n}{n-1}$ $\quad d)\ \frac{n+1}{n}$

2. که $a_n = \frac{3n-1}{2n-1}$ د ترادف $n-$ام حد وي، د دغه ترادف څووم حد $\frac{11}{7}$ دی؟

$a)\ 3$ $\quad b)\ 4$ $\quad c)\ 5$ $\quad d)\ 6$

3. د $-9, -5, -1, 3, \ldots$ حسابي ترادف دوولسم حد عبارت دی، له:

$a)\ 35$ $\quad b)\ 38$ $\quad c)\ -35$ $\quad d)\ -38$

4. د $0.1, 0.4, 0.7, 1, 1.3, \ldots$ حسابي ترادف ګډ توپیر عبارت دی، له:

$a)\ 0.3$ $\quad b)\ 0.1$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ -\frac{2}{3}$

5. د $96, 48, 24, 12, 6, \ldots$ هندسي ترادف ګډ نسبت عبارت له:

$a)\ -\frac{1}{2}$ $\quad b)\ \frac{1}{2}$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ -\frac{2}{3}$

6. د $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \ldots$ هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

$a)\ \frac{3}{512}$ $\quad b)\ \frac{5}{510}$ $\quad c)\ -\frac{5}{512}$ $\quad d)\ \frac{5}{512}$

7. د یوه هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل فورمول عبارت دی، له:

$a)\ S_n = a\frac{1+q^n}{1-q}$ $\quad b)\ S = a\frac{q^n-1}{q-1}$

$c)\ S = a\frac{1+q^n}{1+q}$ $\quad d)$ هيڅ یو

8. په بې نهایت هندسي متقاربو سلسلو کې ګډ نسبت عبارت دی، له:

$a)\ q=0$ $\quad b)\ |q|>1$ $\quad c)\ |q|<1$ $\quad d)$ هيڅ یو

لاندې پوښتنې حل کړئ:

1. څو دوه رقمي طبيعي عددونه لرو چې د څلورو مضرب وي؟

2. د 21 او 31 ترمنځ په بېل بېل ډول درې حسابي وسطونه وليکئ. $21,\square,\square,\square,31$

3. که ديوه حسابي ترادف د لومړي او وروستي جملې مجموعه ($a_1 + a_n = 24$) او د n لومړيو جملو مجموعه يې 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟

4. د لاندې ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$$3, 5, 7, 9, 11, \ \ldots$$

5. که د يوه هندسي ترادف دويمه جمله 6 او اوومه جمله يې 192 وي ،ګډ نسبت يې وټاکئ.

6. د يوه هندسي ترادف د 8 لومړيو جملو د جمعې قسمي حاصل 17 برابره ،د هغه د څلورو لومړيو جملو دی، د نوموړي ترادف ګډ نسبت حساب کړئ.

7. د لاندې سلسلې د جمعې قسمي حاصل په لاس راوړئ.

$$0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \ldots$$

8. د يوه ناپايه هندسي ترادف لومړی حد 9 او پنځم حد يې $\frac{1}{9}$ دی، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.

9. د 3 او 96 عددونو تر منځ 4 هندسي وسطونه په بېل بېل ډول وليکئ.

$$3,\square,\square,\square,\square,96$$

10. د $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \ldots$ هندسي سلسلې د اته لومړيو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

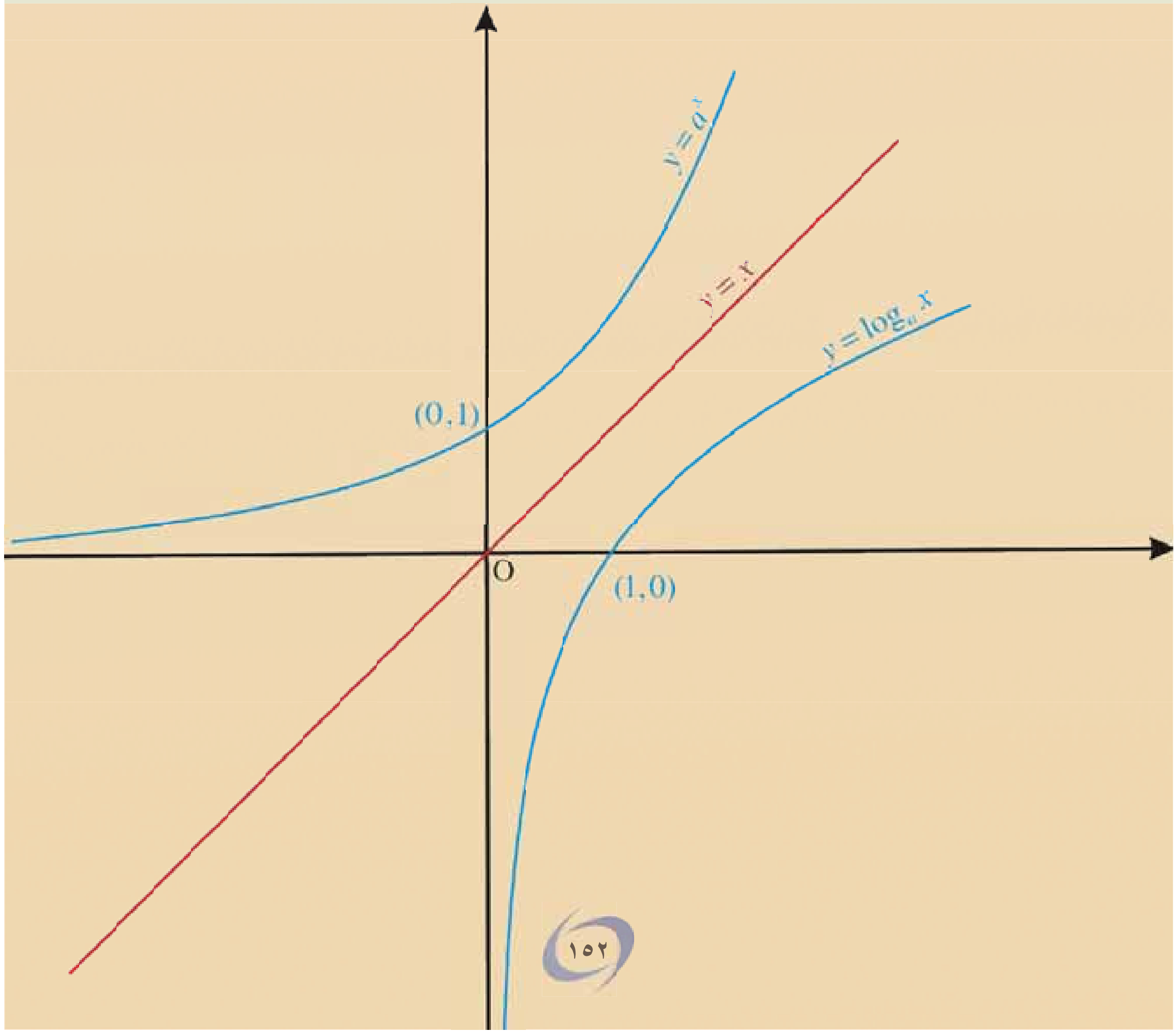
11. که $a = 4$ او $d = 3$ وي، هارمونيکي ترادف د $n = 12$ لپاره په لاس راوړئ.

12. لاندې پيريوديک(متوالي) کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

$a)\ 2.\overline{8}$ $\qquad$ $b)\ 3.\overline{57}$

پنځم څپرکی

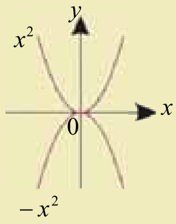
لوګاریتم

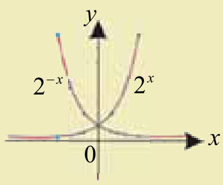


$y = a^x$
$y = x$
$y = \log_a x$
$(0,1)$
O
$(1,0)$

اکسپوننشیل تابع ګاڼي

Exponential function





پوهیږئ چې د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ تابع ګانو ګرافونه نظرد y محور ته یوله بل سره متناظر دي. آیا تراوسه مو د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو د ګرافونو په هکله فکر کړی دی؟

تعریف

که چیرې a یو مثبت عدد او $a\neq 1$ وي، نو د $f(x)=a^x$ تابع ته د a په قاعده اکسپوننشیل تابع وایي.

$$a\in IR^+\setminus\{1\}\ ,\quad x\in IR\ ,\quad f:\ IR\rightarrow IR^+$$
$$f(x)=a^x$$

$f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګاڼې د 2 په قاعده دي.

فعالیت

- د $x\in Z$ مختلفو قیمتونو لپاره د $f(x)=2^x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=2^x$ تابع ګراف د y محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟
- آیا د $f(x)=2^x$ تابع متزایده، متناقصه او که ثابته ده؟ ولې؟

د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه دوضعیه کمیاتویه سیستم کې رسم او یوله بله سره یې پرتله کړئ.

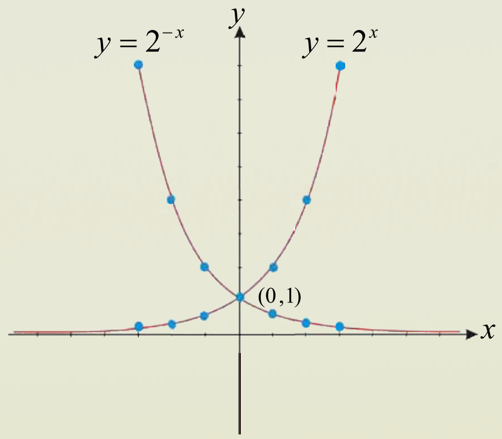
- پورتنی فعالیت د $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ تابع لپاره سرته ورسوئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

د $f(x)=2^x$ تابع قیمت د $x\in Z$ ټولو قیمتونو لپاره همیشه مثبت ده

د $y=2^x$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته متناظر دي، یعنې د $y=2^x$ تابع ګراف هر ټکی د $y=2^{-x}$ تابع ګراف له هر ټکي سره یوپه یو متناظر دی.

که چیرې په اکسپوننشیل تابع کې $a>1$ وي متزاید، که $a<1$ وي متناقص او که $a=1$ وي ثابته تابع ده.



د $y=2^{-x}$ تابع متزاید ده، ځکه چې $a=2>1$ دی.

د $y=2^{x}$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه رسموو.

د $y=2^{x}$ تابع ګراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

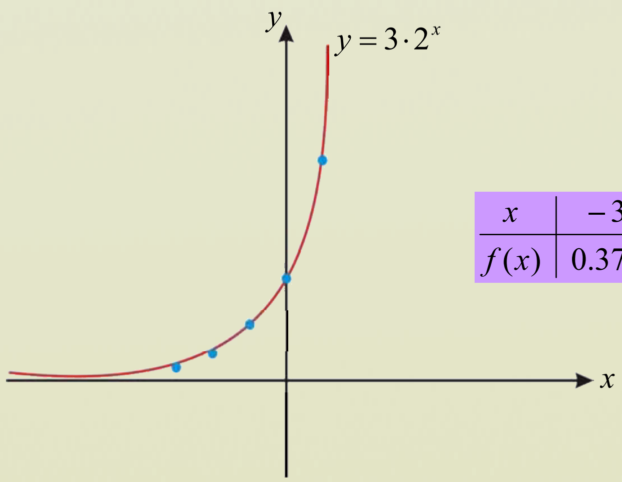
د $y=2^{-x}$ تابع ګراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

مثال: د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تابع ګراف رسم کړئ

حل: د پایلې په پام کې نیولوسره پوهیږو چې د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تابع قاعده $a=2$ ده، نو په دې اساس پورتنی اکسپوننشیل تابع متزایده ده ،ددې لپاره چې د پورتنی اکسپوننشیل تابع ګراف دقیق رسم کړو، نو د x متحول ته مختلف قیمتونه ورکوو د y قیمتونه پیدا او په یوه جدول کې یې لیکو، وروسته دغه ټکی (x او y) د قایمو مختصاتو په سیستم کې په نښه کوو.

چې له نښلولو وروسته یې ګراف رسم کېږي.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24

فعالیت

- د $f(x)=a^x$ اکسپوننشیل تابع په پام کې نیولو سره د x او y ټولو حقیقي عددونو لپاره ثبوت کړئ چې:

$$F(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

$$f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a\cdot x)=(f(x))^a$$

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه: له تیرو معلوماتو څخه په‌ګټه اخیستنې سره د اکسپوننشیل تابع خواص پـه لانـدې ډول بیانوو

1. د هرې اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
2. هره اکسپوننشیل تابع یوپه یو (injective) ده یعنې د هر

$$x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

$$x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

4. هره اکسپوننشیل تابع د $a>1$ لپاره متزایده او د $a<1$ لپاره متناقصه ده.
5. د هرې اکسپوننشیل تابع ګراف د $(0,1)$ له ټکي څخه تیریږي.
6. د $f(x)=a^x$ او $g(x)=a^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګانو ګرافونه نظر y محورته متناظر پراته دي
7. هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوسه تـابع یـې $Log_a x$ دی او د $f(x)=a^x$ اکسپوننـشیل تـابع معکوس تابع $g(x)=a^{-x}$ دی.

پوښتنې

دلاندې اکسپوننشیل تابع گانو گرافونه په قایمو مختصاتوکې رسم کړئ.

$a)$ $f(x) = 2 \cdot 3^{x}$

$b)$ $f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$

$c)$ $f(x) = (-2)^{x}$

$d)$ $f(x) = (-2)^{-x}$

لوګاریتم

Logarithm

آیا کولای شئ چې اکسپوننشیل تابع په بل ډول هم ولیکئ؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

فعالیت

لاندې جدول بشپړ کړئ

$y =$ درکړل شوي عددونه	10000	1000	100	0.01	0.001	0.0001
$a^x =$ طاقت لرونکي عددونه	10^4				10^{-3}	
$x =$ توان			2			-4

- د 10^{-3} طاقت لرونکی عدد قاعده او توان څو دي؟
- آیا دیوه عدد قاعده او توان د 1 عدد کیدلای شي؟
- آیا تاسو کولای شئ چې طاقت لرونکی عدد په بل ډول وښایاست؟

د پورتني جدول له بشپړولو وروسته لاندې تعریف کولای شو، بیان کړو.

تعریف: د طاقت لرونکي عدد یوې بیلې ښوونې ته لوګاریتم وایي، یا په بل عبارت د مجهول توان محاسبه د لوګاریتم په نامه یادیږي.

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

په پورتنی اړیکه کې a ته د لوګاریتم قاعده (Base) او y ته لوګاریتمي عدد وایي، د یوه طاقت لرونکی عدد توان له لوګاریتم څخه عبارت دی، که د قاعدې په اندازه توان لوړشي، را کړل شوی عدد په لاس را کوي.

په تیر جدول کې د 10 د قاعدو توانونه دراکړل شوو عددونو له لوګاریتم څخه عبارت دي.

د ساري په توگه: $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$

هر مثبت عدد پرته له 1 څخه د لوگاریتم قاعده کیدای شي.

مثال: د لوگاریتم د تعریف په کارولو سره لاندې افادې په معادلو(طاقت لرونکو عددي) افادو واړوئ.

$a)\ \log_2 8 = 3$

$b)\ \log_{10} 1000 = 3$

حل:

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$

پوښتنې

1. لاندې لوگاریتمي اړیکې د هغوی په اړوندو افادو واړوئ.

$a)\quad \log_{10} N = x$

$b)\quad \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

$c)\quad \log_9 81 = 2$

$d)\quad \log_5 5 = 1$

2. لاندې افادې (طاقت لرونکی عددونه) د لوگاریتم په شکل ولیکی

$a)\quad 4^3 = 256$

$b)\quad 2^5 = 32$

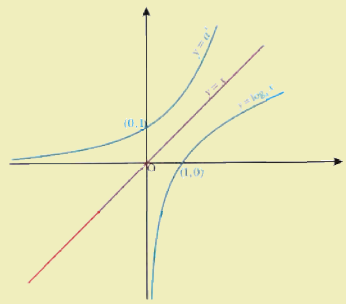
$c)\quad 10^4 = 10000$

$d)\quad 10^{-1} = 10^y$

$e)\quad y = 2^x$

$f)\quad y = 3^x$

لوګاریتمي تابع ګانې



آیا ویلی شي چې کوم ډول تابع ګانې معکوسې تابعګانې لري؟

آیا ویلی شي هغه تابع ګانې چې معکوس لري، په قایمو مختصاتو کې نظر کوم مستقیم خط ته متناظرې دي.

تعریف: د اکسپوننشیل تابع معکوسه تابع د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي او هره اکسپوننشیل تابع لوګاریتمي تابع ده.

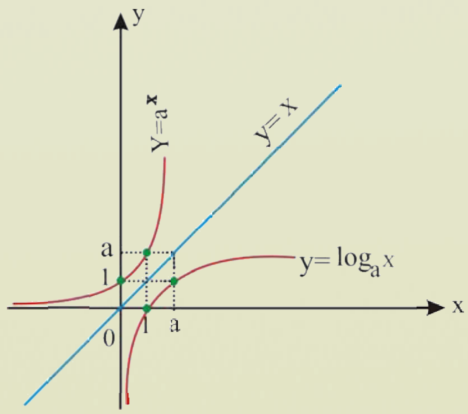
د یوې $(a \in IR^{+}$ او $a \neq 1)$ اکسپوننشیل تابع، معکوسه تابع د a په قاعده، هغه لوګاریمي تابع ده چې د $\log_a x$ سره ښوول کیږي.

هره لوګاریتمي تابع، معکوسه تابع لري چې د $f(x) = a^x$ او $g(x) = \log_a x$ تابعګانې یو د بل معکوسې تابع-ګانې او ګرافونه یې د $y = x$ مستقیم ته متناظر دي.

$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$

$f^{-1}: IR^{+} \rightarrow IR,\ f^{-1}(x) = \log_a x,\ a \in IR^{+},\ a \neq 1$

د $f(x) = a^x$ تابع ګراف د $x = 1$ لپاره لاندې شکل لري.



x	0		1		a		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

که چیرې $a>1$ وي، نود $\forall x_1, x_2 \in IR$ لپاره لرو چې:

که $\log_a x_1 > \log_a x_2$ وي؛ نو $x_1 > x_2$ دی.

د $f(x)=a^x$ تابع گراف د $x=0$ لپاره $\log_a 1 = 0$ $a^0=1 \Leftrightarrow$

لومړی مثال: د $y=3^x$ او $y=\log_3 x$ تابعگانو گرافونه رسم کړئ.

حل: د $y=3^x$ تابع په پام کې نیسو:

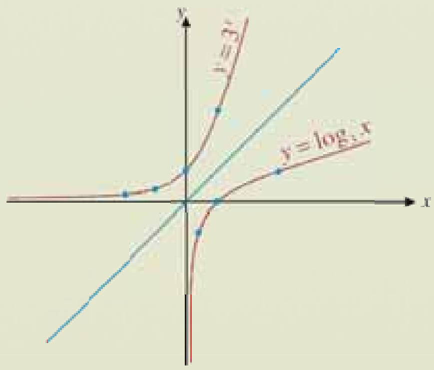
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

اوس $y=\log_3 x$ تابع په پام کې نیسو:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=\log_3 1 \end{array}\right\} (1,0) \qquad \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=\log_3 3 \end{array}\right\} (3,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ y=\log_3 \frac{1}{3} = y = \log_3 3^{-1} = -1 \end{array}\right\} (\frac{1}{3}, -1)$$

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1



فعالیت

د $y=2^x$ او $y=(\frac{1}{2})^x$ اکسپوننشیل تابعگانو گراف په پام کې نیولو سره او د اکسپوننشیل تابعگانو د تعریف له مخې ددوی داړوندو معکوسو اکسپوننشیل تابعگانو قیمتونه د $x=1,2$ لپاره پیدا کړئ او نتیجه یې په عمومي ډول ولیکئ.

پایله: د هرې لوگاریتمي تابع لکه $y=\log_a x$ د یوې اختیاري قاعدې لپاره لرو.

$$\log_a 1 = 0 \ , \ \log_a a = 1 \ , \ a \in IR \ , a > 0 \ , a \neq 1$$

دويم مثال: که چيرې $f(x)=\log_3 x$ راکړل شوی وي نو $f(3), f(9), f(3^{-2}), f(1)$ په لاس راوړي.

حل: په راکړل شوي تابع کې د x پر ځای قيمتونه اېږدو.

$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(3)=\log_3 3=1$$

$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(9)=\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2\cdot 1=2$$

$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(3^{-2})=\log_3 3^{-2}=-2\cdot\log_3 3=-2\cdot 1=-2$$

$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(1)=\log_3 1=0$$

دريم مثال: که $\log_3 x=4$ وي، د x قيمت په لاس راوړئ.

حل: پورتنی لوګاریتم د طاقت په شکل لیکو $\log_3 x=4 \Leftrightarrow x=3^4 \Rightarrow x=81$

د تيرومعلوماتو په کارو لوسره د لوګاريتمي تابع خاصيت په لاندې ډول بيا نيرې.

د لوګاريتمي تابع خاصيتونه:

1. د لوګاريتمي تابع د قيمتونو ساحه د مثبتو عددونو ، له سټ څخه عبارت ده.
2. څرنګه چې $\log_a 1$ د هرې اختياري قاعدې لپاره مساوي په صفر ده، نو په دې اساس لوګاريتمي تابع يوازې يو جذر $x_0=1$ لري چې په ترتيب سره د لوګاريتمي تابع ګراف په قايمو مختصاتوکې د $(1,0)$ له ټکي څخه تيريږي.
3. هره لوګاريتمي تابع يو په يو يا انجکتيف (injective) ده يعنې دهر $x_1 \neq x_2$ لپاره تل $f(x_1)\neq f(x_2)$ دی.

د 2 په قاعده لوګاريتم:

د $f(x)=\log_2 x$ تابع قيمت د $x=16, \frac{1}{8}$ لپاره پيداکړئ.

حل: په راکړل شوی تابع کې د x پرځای قيمتونه وضع کوو چې په پايله کې د تابع قيمت په لاس راځي.

$$f(x)=\log_2 x \Rightarrow f(16)=\log_2 16=\log_2 2^4=4\cdot\log_2 2=4\cdot 1=4$$

$$f(x)=\log_2 x \Rightarrow f(\frac{1}{8})=\log_2(\frac{1}{8})=\log_2 2^{-3}=-3\log_2 2=-3\cdot 1=-3$$

فعالیت

- د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمت د $x=28, \sqrt{2}$ لپاره په لاس راوړئ.

پوښتنې

1. د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمتونه په $f(32), f(\frac{1}{32}), f(1), f(2)$ کې پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\log_3 x$ تابع قیمتونه په $f(1)$ او $f(\frac{1}{81})$ کې په لاس راوړئ.

معمولي لوګاریتم Common logarithm

طبیعي لوګاریتم Natural logarithm

آیا یوازې 2 او 3 د لوګاریتم قاعدې دي او که نور عددونه هم د لوګاریتم قاعده کېدای شي ؟

$$\left.\begin{matrix}\log_e N\\ \log_{10}10^3\end{matrix}\right\}=?$$

تعریف

څرنګه چې ومو لیدل، هر مثبت عدد پرته له 1 څخه کېدای شي د لوګاریتم قاعده شي، خو په عمل کې د 10 او e قاعدې معمول او په کار وړل کیږي.

1 - هغه لوګاریتم چې قاعده یې 10 وي، د معمولي لوګاریتم Common logarithm یـا اعـشاري (Briggs) لوګاریتم په نامه یادیږي چې د log په سمبول یې ښیي او په لاندې ډول ښودل کیږي.

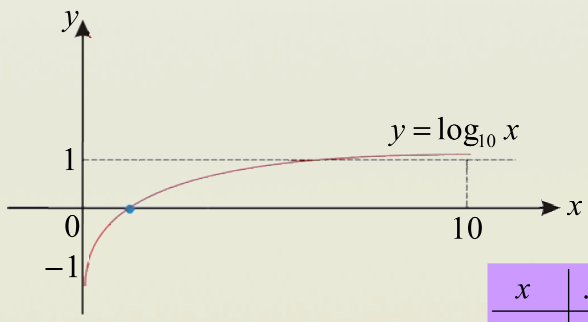
$$f: IR^+ \longrightarrow IR\ ,\ f(x)=\log_{10}x=\log x$$

مثال: د $10^{-1}, 10^3, 10^2, 10^1$ او 10^0 عددونو لوګاریتمونه پیدا کړئ.

حل:

$$\log_{10}10^0 x=\log 10^0=y \Leftrightarrow 10^y=1 \Rightarrow 10^y=10^0 \Rightarrow y=0$$
$$\log_{10}10=\log 10=y \Leftrightarrow 10^y=10^1 \Rightarrow y=1$$
$$\log_{10}10^2=\log 10^2=y \Leftrightarrow 10^y=10^2 \Rightarrow y=2$$
$$\log_{10}10^3=\log 10^3=y \Leftrightarrow 10^y=10^3 \Rightarrow y=3$$
$$\log_{10}10^{-1}=\log 10^{-1}=y \Leftrightarrow 10^y=10^{-1} \Rightarrow y=-1$$
$$\vdots$$
$$n\in z\ ,\quad \log_{10}10^n=\log 10^n=y \Leftrightarrow 10^y=10^n \Rightarrow y=n$$

د x د مختلفو قیمتونو له مخې یې ګراف رسموو



x	$\ldots 10^{-3}$	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
$\log x$	$\ldots -3$	-2	-1	0	1	2	3

2 - هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي د طبیعي لوګاریتم(Natural logarithm) په نامه یادیږي او په ln سره ښوول کیږي ، e یو ناطق عدد دی چې تقریبي قیمت یې عبارت دی له: $e = 2.718281828\cdots$ چې د $(1+\frac{1}{x})^x$ فورمول څخه هغه وخت چې x بې نهایت ته نږدې شي په لاس راځي د e قیمت پیداکول د لوړو ریاضیاتو کار دی. د e عدد د اویلر عدد په نامه یادیږي او $f(x) = e^x$ تابع د طبیعي اکسپوننشیل تابع په نوم یادیږي او داسې هم لیکي: $Exp(x) = e^x$

د $y = e^x$ تابع ګراف لکه $y = a^x$ تابع ګراف په څیر ده.

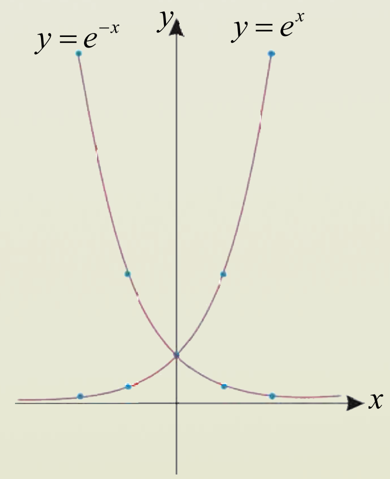
د $y = e^x$ په تابع کې x ته مختلف قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	1	2.71	7.34

د $y = e^{-x}$ په تابع کې x ته بېلابېل قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	7.34	2.71	1	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

د پورتنیو تقریبي قیمتونو په پام کې نیولو سره د $y=e^x$ او $y=e^{-x}$ تابعګانو ګرافونه رسموو:



د طبیعي لوګاریتم مطالعه په لوړو ریاضیاتوکې لکه ساینس، انجنیري، تجارت او تخنیک کې زیات استعمال لري.

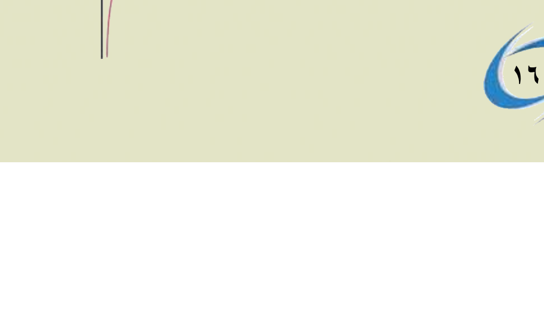
د طبیعي لوګاریتم د تابع $y=\ln x$ ګراف په لاندې ډول دی.

مثال: $\ln e^{-2}$, $\ln e^{-1}$ $\ln e^{0}$, $\ln e^{3}$, $\ln e^{2}$ او $\ln e^{1}$ پیدا کړئ.

حل: د تعریف په پام کې نیولو سره لرو چې: $y=\ln x=\log_e x$

$$\ln e^1 = y \Leftrightarrow e^y = e^1 \Rightarrow y=1$$
$$\ln e^2 = y \Leftrightarrow e^y = e^2 \Rightarrow y=2$$
$$\ln e^3 = y \Leftrightarrow e^y = e^3 \Rightarrow y=3$$
$$\ln e^0 = y \Leftrightarrow e^y = e^0 \Rightarrow y=0$$
$$\ln e^{-1} = y \Leftrightarrow e^y = e^{-1} \Rightarrow y=-1$$
$$\ln e^{-2} = y \Leftrightarrow e^y = e^{-2} \Rightarrow y=-2$$

د $y=\ln x$ تابع ګراف عبارت دی له:



فعالیت

- د $y = \ln\frac{1}{e7}$ قیمت پیداکړی او د $\log 0.0001$ قیمت په لاس راوړئ.

پوښتني

لاندې لوګاریمتونه حساب کړئ.

$a)\log_e e^8$ $\qquad$ $b)\ln\frac{1}{e^{-3}}$

$c)\log 0.01$ $\qquad$ $d)\log\frac{1}{10^{-2}}$

د لوګاریتم قوانین

Low of logarithm

پوهیږي چې د عددونو طاقت خپل قوانین لري، آیا د عددونو لوګاریتم هم قوانین لري او که نه؟

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$

فعالیت

- د طاقت لرونکو عددونو د ضرب قوانین ولیکئ.
- د طاقت لرونکو عددونو د تقسیم قوانین ولیکئ.
- هر عدد د صفر او یاد یوه په توان مساوي په څودی؟

د طاقت قوانینو ته ورته لوګاریتم هم ځینې قوانین لري

لومړی قانون: د هر عدد لوګاریتم د لوګاریتم د تعریف په ساحه کې په خپله قاعده مساوي په یو دی؛ مثلاً:

$$a \in IR,\ a \neq 1, \log_a a = 1$$

ثبوت: پوهیږو چې $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\},\ a^1 = a$ دي، نو $\log_a a = 1$

لومړی مثال: $\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$

دویم قانون: د 1 عدد لوګاریتم په هره اختیاري قاعده مساوي په صفر دی؛ مثلاً: $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\}\ , a^0 = 1$ نو

$$\log_a 1 = 0$$

دویم مثال: $\log_{\sqrt{5}} 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5})^0 = 1$

دریم قانون: د دوو یا څوعددونو د حاصل ضرب لوګاریتم د هغو د لوګاریتمونو له مجموع سره مساوي دی یعنې:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

ثبوت: که چیرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرو

$$x = a^p \ \dots \ \text{I}$$

$$y = a^q \ \dots \ \text{II}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا ضربوو: $I \cdot II \Rightarrow x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

د پورتنۍ اړیکې له دواړو خواوې لوګاریتم نیسو: $\log_a(x \cdot y) = p+q$

د p او q قیمتونو په ایښودلو سره لیکو: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

لومړی مثال: د 50 عدد لوګاریتم په لاس راوړئ.

حل: $\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$

دویم مثال: $\log_4 2 + \log_4 8 = ?$

حل:

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4(2 \cdot 8) = \log_4(4 \cdot 4)$$
$$= \log_4 4 + \log_4 4 = 1+1 = 2$$

فعالیت

- دلاندې غیر مساواتو سم والی، د مثال په واسطه وښایاست.

$$\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

خلورم قانون: د دوو عددونو د تقسیم لوګاریتم د لوګاریتمونو له تفاضل سره مساوي دي، یعنې:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ثبوت: که چیرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرو:

$$\left.\begin{array}{l} x = a^p \ldots\ldots\ldots\ I \\ y = a^q \ldots\ldots\ldots\ II \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log_a x = p \\ \log_a y = q \end{array}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا یو په بل ووېشو.

$$\frac{I}{II} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

د پورتنۍ اړیکې له اطراف څخه لوګاریتم نیسو: $\log_a \frac{x}{y} = p - q$

د p او q قیمتونو په ایښودلو سره لیکو: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

لومړي مثال: د $\log\frac{5}{2}$ محاسبه کړئ داسې چې $\log 2 = 0.3010,\ \log 5 = 0.6900$ وي.

حل: $\log\frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 = 0.6900 - 0.3010 = 0.3980$

دويم مثال: $\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy)$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: څلورم قانون له ښي لوري څخه چپ لوري ته تطبيقوو.

$$\begin{aligned}\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy) &= \log_y\frac{10y^2x}{2xy}\\ &= \log_y(5y) = \log_y y + \log_y 5\\ &= \log_y 5 + 1\end{aligned}$$

پنځم قانون: د يوه توان لرونکي عدد لوګاريتم مساوي دی د توان او د طاقت د قاعدې د لوګاريتم له حاصل ضرب سره يعنې که چيرې $(a^x)^n$ ولرو نو $\log_a x^n = n\log_a x$ دی.

$$\log_a x^n = \log_a(x\cdot x\cdot x\cdot\ \dots\ \cdot x)$$

$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{lag_a x \text{ خلې } n}$$

په پايله کې $\log_a x^n = n\log_a x$

له پنځم قانون څخه په ګټې اخيستنې سره کولای شو وليکو.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a(x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$$

لومړی مثال: $\log 625 = ?$

حل: $\log 625 = \log 5^4 = 4\log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$

دويم مثال: دغه لوګاريتم $\log_3\sqrt[3]{9}$ پيدا کړئ؟

حل: $\log_3\sqrt[3]{9} = \log_3\sqrt[3]{3^2} = \log_3(3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$

فعاليت

- لاندې لوګاريتمونه پيداکړئ.

$\log_5\sqrt{8} = ?$ $\qquad$ $\log_3(0.12) = ?$

پوښتنې

1. لاندې ضربي افادې د جمعې د حاصل په شکل او دجمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل ولیکئ او د امکان په صورت کې یې وروستی قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ \log_4(5x^2) = ?$

$b)\ \log_{10}(10x^2y) = ?$

$c)\ \log_{10}5 + \log_{10}20 = ?$

$d)\ \log_{12}36 + \log_{12}4 = ?$

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واړوئ، د امکان په صورت کې وروستې ځواب په لاس راوړئ.

$a)\ \log_7\frac{63}{49} = ?$

$b)\ \log\frac{125}{80} = ?$

$c)\ \log_a(x^2a) - \log_a x^2 = ?$

$d)\ \log_{10}1000 - \log_{10}100 = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a)\ \log_{10}(0.0001)$ $\qquad b)\ \log_2(8)^{-\frac{1}{3}}$

د لوګاریتم د یوې قاعدې اړول په بله قاعده

که د یوه عدد لوګاریتم په یوه مشخصه قاعده راکړل شـوی وي، څرنګه کولای شو، نوموړی عدد په بله قاعده واړوو.

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

شپږم قانون: په عین قاعده مساوي دی په د دوو عددو نو د تقسیم د حاصل لوګاریتم:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

ثبوت: د $\log_b m = y$ ثبوت لپاره معادل شکل یې لیکو یعنې $m = b^y$ اوس له اطرافو څخه د a په قاعـده

لوګاریتم نیسو: $\log_b m = \log_a b^y \Rightarrow \log_b m = y \log_a b$

اوس د y قیمت په پورتنۍ اړیکه کې اېږدو: $\log_a m = \log_b m \cdot \log_a b$

د پورتنۍ اړیکې دواړه خواوې په $\log_a b$ ویشو:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m \cdot \log_a b}{\log_a b} = \log_b m \Rightarrow \frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

لومړی مثال: $\log_9 27$ محاسبه کړئ.

حل: له شپږم قانون څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_3 75$ حساب کړئ.

حل: بیا هم د شپږم قانون په کارولو سره لرو چې:

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3 \cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$$

یادونه: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی، د هغه عدد له منفي لوګاریتم څخه چې هغه د کو لوګاریتم (co-logarithem) په نامه یاد یږي.

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = co\log_a M$$

مثال: $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

حل: $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5\log_2 2 = -5\cdot 1 = -5$

اووم قانون: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی په: $\log_a M = \dfrac{1}{\log_M a}$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\dfrac{1}{\log_M a} = x$ نیسو: $\dfrac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow x\log_M a = 1 \Rightarrow \log_M a^x = 1$

د 1 عدد په ځای لیکلی شو چې $\log_M M = 1$

$$\log_M a^x = \log_M M \Rightarrow \log a^x = \log M \Rightarrow a^x = M$$

اوس د دواړو خواوو لوګاریتم نیسو یعنې $\log_a M = x$

په پورتنی اړیکه کې د x په ځای قیمت اېږدو: $\log_a M = x = \dfrac{1}{\log_M a}$

مثال $\log_{125}\sqrt{5} = ?$

حل: $\log_{125}\sqrt{5} = \log_{125}(5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{125} 5 = \frac{1}{2\log_5 125} = \frac{1}{2\log_5 5^3} = \frac{1}{6\log_5 5} = \frac{1}{6}$

فعالیت

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$\log_{64} 2 = ?$ $\qquad \log_4 \sqrt{25^6} = ?$

اتم قانون: دیوه عدد لوګاریتم په توان لرونکي قاعده مساوي دی په $\log_{a^n} x = \dfrac{1}{n}\log_a x$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\log_a x = m$ نیسو او هغه داړوند طاقت په شکل لیکو:

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{n}{n}} \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه لوګاریتم نیسو: $\log_{a^n} x = \dfrac{m}{n} \Rightarrow \log_{a^n} x = \dfrac{1}{n}\log_a x$

اوس د m په ځای قیمت اېږدو: $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

له پورتنې قانون څخه لاندې پایلې په لاس راځي

$1)\ \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x$ $\quad 2)\ \log_{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} = \log_n x$ $\quad 3)\ \log_{a^n} x^n = \log_a x$

لومړی مثال: $\log_{25} 125 = ?$

حل: $\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$

دویم مثال: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

حل: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{(3)^{\frac{1}{3}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{-\frac{1}{3}}} (3)^6 = \frac{6}{-\frac{1}{3}}\log_3 3 = \frac{6}{1}(\frac{3}{-1})\cdot 1 = -18$

فعالیت

د پورتنیو خاصیتونو په کارولو سره لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

a) مخامخ لوګاریتم په معکوس ډول ولیکئ. $\log_3 6 = ?$

b) $\log_8 \sqrt[3]{4} = ?$

د معمولي او طبیعي لو ګاریتمونو ترمنځ اړیکه: د دغو دوو لوګاریتمونو(اعشاري او طبیعي) په پام کې نیولو سره یعنې د 10 او e عددونه د $\log_a x = \log_b x.\log_a b$ له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې چې b, a او x مثبت عددونه a او b د 1 خلاف دي:

که چیرې $a = e$ او $b = 10$ وضع شي، نو لرو چې:

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

پوهېږو چې $\log_e x = \ln x$ دی، نو:

$$\ln x = \log_e 10 \cdot \log x$$

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

که چیرې $b = e$ او $a = 10$ وضع شي، نو:

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} x = \log x = \log_e x \cdot \log_{10} e$$

$$\log x = \log_{10} e \cdot \ln x$$

څرنګه چې $\log_{10} e = 0.4343$ دی، نو لاندې اړیکه لرو:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

لومړی مثال: د $\ln 4.69$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot \log 4.69$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

دویم مثال: د $\log 6.73$ قیمت پیداکړئ په داسې حال کې چې $\ln 6.73 = 1.9066$ وي.

حل: د تیرې اړیکې په کارولو سره لرو چې:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

$$\log 6.73 = 0.4343 \cdot \ln 6.73$$

$$= 0.4343 \cdot 1.9066 = 0.8280$$

پوښتنې

لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

$a)\ \log_{\frac{1}{3}} 3^{-4} = ?$ $b)\ \log_9 27 = ?$

$c)\ \log_8 4 = ?$ $d)\ \log_{121} 14641 = ?$

$e)\ \ln 672000$ $f)\ \ln 0.00927$

$g)\ \ln 672000$ $h)\ \ln 0.235$

کرکټرسټیک او مانتیس

Characteristic and Mantissa

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\} = ?$$

پوهېږو چې:

$\log_{10} 1000 = 3\ ,\ \log_{10} 100 = 2\ ,\ \log_{10} 1 = 0$

دی. آیا دیوه عدد د ارقامو دشمیر او لوګاریتم ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟

تعریف

پوهېږو چې د x هر حقیقي مثبت عدد د $x = S \cdot 10^n$ په شکل لیکل کیدای شي، داسې چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد وي.

که چیرې د x لوګاریتم غوښتل شوي وي، په لاندې ډول یې پیداکولای شو.

$$\log x = \log(S \cdot 10^n) = \log S + \log 10^n = \log S + n\log 10 = \log S + n$$

د $\log S$ په هغه صورت کې چې $1 \le S < 10$ وي، S د x د لوګاریتم مانتیس یا اعشاري برخه او n چې یو تام عدد دی، د x د لوګاریتم مشخصه یا کرکټرسټیک څخه عبارت دی. څرنګه چې $1 \le S < 10$ دي نو.

$$\log 1 \le \log S < \log 10$$
$$0 \le \log S < 1$$

له پورتني اړیکې څخه داپایله په لاس راځي چې دیوه عدد لوګاریتم د یو او صفر ترمنځ قرار لري.

فعالیت

- لاندې جدول بشپړکړئ.

د عددونو توان لرونکی شکل	$20 = 10^{1.390}$	$10 = 10^1$	$7 = 10^{0.845}$	$4 = 10^{0.602}$	$1000 = 10^3$	$1 = 10^0$	$0.01 = 10^{-2}$	$0.001 = 10^{-3}$
د عددونو لوګاریتمي شکل	$\log_{10} 20$		$\log_{10} 7$			$\log_{10} 1$		$\log_{10} 0.001$
لوګاریتم		1		0.602	3		-2	-3

د هغو عددونو لوګاریتمونه چې د 0، 10، 100, 1000، 0.01 د 0.001 عددونو ترمنځ واقع دي، مساوي له څو سره دي؟

- آیا هر څومره چې عدد لوی شي لوګاریتم یې هم لوئیږي؟
- له 1 څخه د کوچنیو عددونو د لوګاریتم علامه منفي ده، که مثبت؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- که چیرې $1 \leq x < 10$ سره وي، کرکټرستیک یې صفر دی.
- که چیرې $10 \leq x < 100$ وي کرکټرستیک یې مساوي له 1 سره دی.
- که چیرې $100 \leq x < 1000$ وي، نو کرکټرستیک یې 2 دی.

دیوه عدد په لوګاریتم کې صحیح برخه کرکټرستیک او اعشاري برخه یې مانتیس نومېږي.

هغه وخت چې عدد د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکل شي، د 10د عدد توان له کرکټرستیک څخه عبارت دی.

د عدد لیکنې علمي طریقه Scientific notation

کولای شو هر عدد د 10د توان په څیر ولیکو، لکه: د N عدد داسې لیکو $N = a \cdot 10^n$ چې په دې حالت کې $1 \leq a < 10$ او n یو تام عدد دی

لومړی مثال: لاندې عددونه د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکئ.

$a)$ 2573 $b)$ 573216 $c)$ 0.0028

حل:

$a)$ $2573 = 2.373 \cdot 10^3$

$b)$ $573216 = 5.73216 \cdot 10^5$

$c)$ $0.0028 = \dfrac{28}{10000} = \dfrac{28}{10^4} = 28 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10^{-3}$

قاعده: که چیرې دیوه عدد صحیح برخه چې د صفر خلاف وي، نو د هغه عدد دلوګاریتم کرکټرستیک مساوي دی، د صحیح برخې د ارقامو په شمیر، منفي یو.

دویم مثال: د $\log 526.9$ کرکټرستیک مساوي له څو سره دی؟

حل: د صحیح ارقامو شمیرله 3 سره برابر دی، نو کرکټرستیک یې $3-1=2$ دی.

او له یوه څخه د کوچنیو عددونو کرکټرستیک منفي علامه لري او قیمت یې د اعشاري د علامې دښي خوا د صفرونو له شمیر څخه، د یوه په اندازه زیات دی.

دریم مثال: د $\log 0.002$ کرکټرستیک مساوي په څو دی؟

حل:

$$\begin{aligned}\log 0.002 &= \log(2\cdot 10^{-3})\\ &= \log 2 + \log 10^{-3}\\ &= \log 2 - 3\log 10 = \log 2 - 3\end{aligned}$$

نو کرکټرستیک یې -3 دی.

له تیرو دوو مثالونو څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د لاندې عددونو کرکټرستیک په لاس راوړو.

لوګاریتمونه		کرکټرستیک
$\log 89435$	$5-1$	4
$\log 56.784$	$2-1$	1
$\log 0.995$	$0-1$	-1
$\log 0.0789$	$-1-1$	-2

پوښتنې

دلاندې لوګاریتمونو کرکټرسټیک په شفاهي ډول ووایاست؟

$a)\ \log 0.9560$ | $b)\ \log 956.0$

$d)\ \log 2345$ | $e)\ \log 3.875$

$c)\ \log 9560$ | $f)\ \log 0.0009560$

د لوګاریتم جدول

څرنګه چې په تیرلوست کې مو ولوستل چې د یوه عدد لوګاریتم لـه دوو برخو(کرکټرسټیک او مـانتیس) څخه تشکیل شوی دی. د مانتیس د پیدا کولو لپاره پـه څـه ډول عمل کوئ.

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\}=?$$

د مانتیس د پیدا کولو طریقه:

پوهیږو چې هر لوګاریتمي عدد له دوو یعنې صحیح او اعشاري برخوڅخه جوړ شوی دی، څرنګـه چې صحیح برخه یا مشخصه د خپل عدد د ارقامو له مخی او مانتیس یې د لوګـاریتمې جـدول لـه مخې چې مخکې ترتیب شوی، ټاکل کېږي، دغه جدول تر 7،څینې تر 5 او څینې یې تر 4 او 3 اعـشاري خـانو پورې ترتیـب شـوی چې د مانتیس د پیدا کولو لپاره ترې کار اخلي چې د اعشاري تامو عددونو د ارقامو د شمیر په پام کې نیولو سـره جدولونه نومول شوی دي. لکه 7 رقمي جدولونه 5، رقمي جدولونه او داسې نور.

د یوه عدد د مانتیس د پیدا کولو لپاره د نوموړي عدد ارقام له چپ لوري څخه په پام کې نیول کېږي په دې ډول چې ښي لوری دیوه رقم په استثنا هغه د جدول په داسې ستون کې لټوو چې د ښي خواله رقم سره مطابقت ولري، نو هغه اعشاري عدد چې د سطر او ستون تقاطع وي، له مانتیس څخه عبارت دی.

مثال:

حل:

$$\log 765 = ?$$

$$\log 765 = \log(7.65\cdot 10^2)$$

$$= \log 7.65 + \log 10^2$$

$$= \underbrace{\log 7.65}_{\text{مانتیس}} + \underbrace{2}_{\text{کرکټرسټیک}}$$

د 2 عدد د کرکټرسټیک څخه عبارت دی او دمانتیس د پیداکولو لپاره یعنې $\log 7.65$ پـه 76 سطر او 5 - ام ستون کې ګورو چې د 8837 عدد سره مطابقت کوي یعنې د نوموړي عدد مانتیس 0.8837 دی چې په حقیقت کې د 765 عدد مانتیس دی.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
74										
75										
76	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
77										
78										
79										

$$\log 765 = \log 7.65 + 2 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$

دویم مثال: $\log 70.9$ په لاس راوړی؟

حل:

$$\log 70.9 = \log(7.09 \cdot 10)$$
$$= \log 7.09 + \log 10^1$$
$$= \log 7.09 + 1$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70 ⋮ 79 ⋮	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	**8506**

د 709 عدد د 9 ستون لاندې لټوو چې له 8506 عدد سره مطابقت کوي یعنې د 7.09 عدد مانتیس 0.8506 دی، په پایله کې یې لوګاریتم داسې حسابوو:

$$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$$

دریم مثال: د 0.0247 لوګاریتم حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\log 0.0247 = \log(2.47 \cdot 10^{-2})$$
$$= \log 2.47 + \log 10^{-2}$$
$$= \log 2.47 - 2$$

د 2.47 عدد په 24 – ام سطر او 7 – ام ستون لاندې لټوو چې له 3927 عدد سره مطابقت کوي یعنې د 2.47 عدد مانتیس عبارت دی له: 0.3927 په پایله کې د لوګاریتم حاصل داسې په لاس راوړو:

$$\log 0.0247 = \log 2.24 - 2 = 0.3927 - 2 = \bar{2}.3927$$

یادونه: څرنګه چې مانتیس همیشه مثبت دی، که کرکټرستیک منفي وي او وغواړو دواړه د یوه مثبت عدد په شکل ولیکو، نو منفي علامه د کرکټرستیک له پاسه لیکو؛ مثلاً په پورتني مثال کې:

$$0.3927 - 2 = \bar{2}3927$$

فعالیت

- د لوګاریتم د جدول په پام کې نیولو سره 9280 عدد لوګاریتم حساب کړئ.

څلورم مثال: د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د $15, 105, 900, \frac{3}{4}, 0.007$ عددونو لوګاریتمونه پیدا کړئ.

عددونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لوګاریتمونه	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

$$\log 15 = (3\cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$$

$$\begin{aligned}\log(105) &= \log(5\cdot 3\cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7\\ &= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570\\ &= 2.02079\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(900) &= \log(9\cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2\\ &= 0.95424 + 2\\ &= 2.95424\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(\frac{3}{4}) &= \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206\\ &= -0.12486\end{aligned}$$

$$\log(0.007) = \log(7\cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = \bar{3}.84570$$

پوښتنې

1. دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول ووایاست او مانتیس یې د جدول له مخې پیدا کړئ.

$a)\ \log 222$ $b)\ \log 0.921$

$c)\ \log 928$ $d)\ \log 527$

$e)\ \log 0.024$ $f)\ \log 2400$

$h)\ \log 0.00024$ $j)\ \log 24$

2. د لاندې لوګاریتمونو قیمتونه په لاس راوړئ.

$a)\ \log(2.73)^3$ $b)\ \log\sqrt[5]{0.0762}$

انتي لوګاریتم

Anti Logarithm

که چیرې د یوه عدد لوګاریتم راکړل شوي وي څرنګه کولای شو، عدد یې پیدا کړو؟

$$\log 481 = 2.6821$$
$$\log N = 1.6580$$
$$N = ?$$

تعریف: که چیرې $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم بلل کېږي یعنې $y = anti\log x$

مثلاً که چیرې $\log 34 = 1.5315$ وي، نو د 1.5315 انتي لوګاریتم د 34 له عدد سره مساوي دی.

فعالیت

- که چیرې $\log N = 2.8779$ وي، نو د N عدد و ټاکئ.
- د نومړي عدد کرکټرستیک پیدا کړئ.
- د مانتیس په جدول کې د 0.8779 عدد له کوم سطر او ستون سره مطابقت لري؟

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

څرنګه چې د 2 عدد کرکټرستیک دی، نو N یو درې رقمي عدد دی، مانتیس یې په جدول کې له 75 سطر او 5 ستون سره مطابقت لري، نو د N عدد عبارت دی له: 755

لومړی مثال: د $\log N = 2.9939$ د N عدد په لاس راوړئ.

حل: د نومړي لوګاریتم د مانتیس برخه یعنې 0.9939 د لوګاریتم په جدول کې پیدا کوو، ګورو چې په کوم سطر او ستون کې ځای لري. دغه د سطر او ستون عدد داسې لیکو چې د ستون عدد داړونده سطر ښي لوری ته قرار ولري چې عبارت دی له 9.86 څخه یعنې د 986 عدد مانتیس 0.9939 دی. په پورتني پوښتنه کې 2 د کرکټرستیک په توګه راکړل شوی، نو د صحیح رقمونو شمیر یې 3 دی، چې مطلوب عدد عبارت دی له 986 یعنې: $N = 986$

$$\log 986 = 2.9939$$
$$anti\log 2.9939 = 986$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.5 9.6 9.7 9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952

دویم مثال: که چیرې $\log N = 0.9791$ وي N په لاس راوړئ.

حل: دلته هم د 9791 عدد په جدول کې پیدا کوو، د سطر او ستون اړوند عددونه لکه د تیر په شان لیکو، څرنګه چې 953 مانتیس ښیي چې د مطلوب عدد 953 رقمونه دي څرنګه چې کرکټرسټیک صفر دی، نو مطلوب عدد یعنې N یو صحیح رقم لري چې عبارت دی له:

$N = 9.53$

$\log 9.53 = 0.9791$

$anti\log 0.9791 = 9.53$

دریم مثال: $\log N = -3.0531$ دی، د N عدد پیدا کړئ.

په مثال کې لیدل کیږي چې کرکټرسټیک او مانتیس دواړه منفي دي او په جدول کې منفي عدد وجود نه لري، ددې لپاره چې مانتیس مثبت شي، د 1 عدد له مانتیس سره جمع او له کرکټرسټیک څخه یې کموو، په مساواتو کې تغیرنه راځي.

اوس کولای شو د مانتیس 0.9469 په مرسته د N عدد له جدول څخه پیدا کړو، چې عبارت دی له 886 .

کرکټرسټیک ښیي چې د اعشاري د علامې او له چپې خوا څخه د لومړي 8 عدد تر منځ درې صفرونه ځای لري

$N = 0.000885$ نو $anti\log -3.05531 = 0.000885$

څلورم مثال: دلاندې عددونو لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\ 2$ $\quad b)\ 0.2$ $\quad c)\ 0.02$ $\quad d)\ 0.0002$

حل:

$a)\ \log 2 = 0.3010$

$b)\ \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \bar{1}.3010$

$c)\ \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \bar{2}.3010$

$d)\ \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \bar{4}.3010$

له پورتني مثال څخه دا پایله په لاس راځي چې دیوه عدد د لوګاریتم مانتیس یوازې د رقمونو په ترتیب پورې اړه لري په پورتني مثال کې ټول عددونه یو شان مانتیس 0.3010 لري، ښي او یا چپ لوري ته د صفرونو زیاتول په مانتیس باندې کومه اغیزه نه لري.

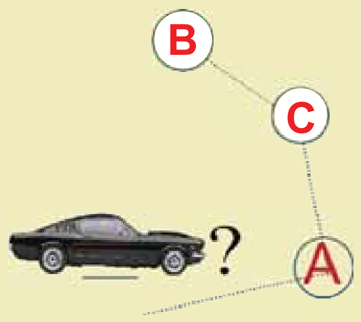
پوښتنې

دلاندې هر یوه انتي لوګاریتم قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ anti\log 4.9479$ $\qquad b)\ anti\log -5.0521$

خطي انټرپولېشن
Linear Interpolation

يوګړندی موټر په متوسط سرعت په 30 دقيقو کې د A ښارته او يونيم ساعت وروسته په همدغه سرعت د B ښارته رسيږي، وواياست چې په همدې ثابت سرعت به نوموړی موټر د C ښار ته چې د A او B ښارونو تر منځ پروت دی، په څومره وخت کې ورسيږي.



فعاليت

- که چيرې $\log A = a$, $\log B = b$ راکړل شوي وي او $\log C = c$ وي، په داسې حال کې چې $A < C < B$ دی.
- $\log C$ د حقيقي عددونو په کومه فاصله کې ځای لري.
- په اټکل ډول وواياست چې که (a, b) يوبل ته نژدې عددونه وي، نود C لوګاريتم چيرې پروت دی؟
- د a او b تر منځ قيمتونه د حسابي وسط له مخې په لاس راوړئ.

پايله: که چيرې ديوه نامعلوم قيمت د پيداکولو لپاره چې ددوو معلومو عددونو تر منځ پروت وي، د معلوموعددونو په مرسته نامعلوم عدد پيداکړو، په دې صورت کې نوموړې طريقه د خطي انټرپولېشن په نامه يادېږي.
که يو څلور رقمي عددلکه: 1.234 ولرو، نه شوکولای د هغه لوګاريتم له درې رقمي جدول څخه په لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوګاريتم د خطي انټرپولېشن په واسطه پيداکولای شو.

لومړی مثال: د $\log 5.235$ قيمت په لاس راوړئ.

حل: ښکاره ده چې دنوموړي عدد لوګاريتم په جدول کې نشته، خو د 5.230 او 5.240 عددونو په منځ کې پراته دي چې لوګاريتمونه يې په جدول کې شته، او په لاندې ډول يې په لاس راوړو.

$$\log 5.230 = 0.7185$$
$$\log 5.240 = 0.7193$$

څرنګه چې $5.23 < 5.235 < 5.24$ دی، نو:

$$\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$$
$$0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$$

که چيرې $\log 5.535 = x$ په پام کې ونيسو ، نو په دې صورت کې ليکو چې: $0.7185 < x < 0.7193$

د عددونو د لوګاریتم او مانتیسو نو ترمنځ تو پیر په پام کې نیسو.

$$0.010 \text{ د عددونو توپیر} \quad \begin{array}{cc} \text{عددونه} & \text{لوګاریتمونه} \end{array}$$

$$0.010 \quad \left[\begin{array}{ccc} & 5.240 & 0.7193 \\ 0.005 & \left[\begin{array}{c} 5.235 \\ 5.230 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} x \\ 0.7185 \end{array}\right] d \end{array}\right] 0.0008 \quad \text{د لوګاریتمونو توپیر}$$

د خطي انټرپولیشن په طریقه کې له دې څلورو عددونو څخه یو تناسب چې یو لـه بـل سـره متناسـب دي جـوړوو او نامعلوم قیمت پیدا کوو یعنې:

$$\frac{d}{0.0008} = \frac{0.005}{0.010} \Rightarrow d = \frac{0.005 \cdot 0.0008}{0.010} \Rightarrow d = \frac{0.000004}{0.010} = 0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عددله مانتیس سره جمع کوو. چې حاصل یې د مطلوب عدد لوګاریتم دی.

$$0.0004 + 0.7185 = 0.7189$$
$$\log 5.235 = 0.7189$$

دویم مثال:د 0.0007957 عدد لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\begin{aligned} \log 0.0007957 &= \log(7.957 \cdot 10^{-4}) \\ &= \log 7.957 + \log 10^{-4} \\ &= \log 7.957 - 4\log 10 \\ &= \log 7.957 - 4 \end{aligned}$$

د 7.957 عـدد لوګـاریتم پـه جـدول کـې نـشته، لیـدل کېـږي چـې کرکټرسـټیک یـې $4-$ دی، خـو د 7.96 او 7.95 عددونو لوګاریتم په جدول کې شته.

$$\log 7.960 = 0.9009$$
$$\log 7.950 = 0.9004$$

څرنګه چې $7.950 < 7.957 < 7.960$ نو:

$$\log 7.950 < \log 7.957 < \log 7.960$$

د $\log 7.957 = x$ په پام کې نیولو سره، دخطي انټرپولیشن پواسطه یې لوګاریتم په لاس راوړو.

عددونه	لوګاریتمونه
7.96	0.9009
7.957	x
7.950	0.9004

د عددونو توپیر 0.01، 0.007 ؛ d ، د لوګاریتمونو توپیر 0.0005

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01} \Rightarrow$$

$$d = 0.0005\frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو:

$$0.9004 + 0.0004 = 0.9008$$

په پای کې په لاس راځي چې:

$$\log 0.0007957 = 0.9008 + (-4) = \bar{4}.9008$$

دریم مثال: 4.5544 عدد انتي لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: که چیرې $anti\log 4.5544 = x$ وضع شي، نو باید x پیداکړو، له پورتني اړیکې څخه داسې پایله په لاس راځي.

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$

$$\log x = \log(t \cdot 10^4) = \log t + 4$$

د 4.5544 عدد په جدول کې نشته، خو د 0.5539 او 0.5551 عددونه په جدول کې شته، انتي‌لوګاریتم یې پیدا کوو، ددغه عددونو په مرسته د x قیمت د انټرپولیشن په طریقه پیدا کوو، د عددونو تفاضل لکه په تیرو مثالونوکې په لاس راوړو او تناسب یې د تیریه شان تشکیلوو.

عددونه	مانتیسونه
3.59	0.5551
t	0.5544
3.58	0.5539

د عددونو توپیر 0.01، d ؛ 0.0005، د مانتیسونو توپیر 0.0012

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d = 0.01 \cdot \frac{0.0005}{0.0012} = \frac{0.000005}{0.0012} = 0.0041667$$

$$d = 0.0042$$

د t د قیمت پیدا کولو لپاره د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو.

$$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042$$
$$= 3.5842$$
$$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$$
$$\log x = \log 35842$$

هغه وخت چې ددوو عددونو لوگاریتمونه سره مساوي وي، خپله عددونه په خپل منځ کې سره مساوي دي، نو:

$$x = 35842$$

پوښتني

په لاندي اړیکو کې د x او z قیمتونه پیدا کړئ.

$a)\quad z = \log 0.001582 \qquad b)\quad x = \log 6.289$

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلو حل

Exponential and logarithmic equations

$$\log_2(x^2-1)=3$$
$$5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$$

آیا تر اوسه مود $5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$ او $\log_2(x^2-1)=3$ معادلو د حل په اړه فکر کړی دی؟

د x په کومو قیمتونو پورتني مساوات سم دی؟

څرنګه کولای شو په دغه ډول معادلاتو کې د x مجهول قیمت وټاکو.

تعریف

هغه معادلې چې توانونه یې مجهول وي، د اکسپوننشیل معادلو په نامه یادیږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره که چیرې وکړای شو، د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کړو، نو د طاقت د قوانینو له مخې، چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه یې هم یو له بل سره مساوي دي.

لومړی مثال: که $2^{x-1}=32$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د مساواتو د دواړو خوا وو قاعدې سره مساوي کوو.

$$2^{x-1}=32 \Rightarrow 2^{x-1}=2^5 \Rightarrow x-1=5 \quad , \quad x=6$$

دویم مثال: د $8^{3x-1}=2^4$ اکسپوننشیل معادله حل او وازموئ.

حل:

$$8^{3x-1}=2^4$$
$$(2^3)^{3x-1}=2^{3(3x-1)}=2^4$$

څرنګه چې قاعدې یو له بل سره مساوی دي، نو توانونه یې هم مساوی دي؛ نو لیکو:

$$3(3x-1)=4$$
$$9x-3=4 \Rightarrow 9x=4+3$$
$$9x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{9}$$

آزمونه:

$$8^{3\frac{7}{9}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7}{3}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}} = 2^4 \Rightarrow 8^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow 2^4 = 2^4$$

فعالیت

- د $16^{x+1} = 64^{x-2}$ اکسپوننشیل معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

لوګاریتمي معادلې:

هغه لوګاریتمي افادې چې په هغوی کې متحول او یا مجهول شتون ولري، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادیږي. له یوې لوګاریتمي معادلې څخه د مجهول قیمت پیداکولو لپاره لومړی معادله د لوګاریتم د قوانینو له مخې ساده کوو، وروسته یې د الجبري قوانینو او یا له اکسپوننشیل معادلو څخه په کار اخیستنې سره د مجهول یا متحول قیمت په لاس راوړو.

لاندې مثالونه د لوګاریتمي معادلو بېلګې دي چې د مختلفو قوانینو له مخې د مجهول قیمت محاسبه شوی دی.

لومړی مثال: له لاندې لوګاریتمي معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.

حل:

$$\log_2(x^2-1) = 3$$

پورته لوګاریتمي شکل داسې لیکو :

$$x^2 - 1 = 2^3$$

$$x^2 = 1 + 8 = 9$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9} \quad , \qquad x = \pm 3$$

دویم مثال:په $\log_3(x+2)=2\log_3 9$ لوګاریتمي معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$\log_3(x+2)=2\log_3 9$$
$$\log_3(x+2)=\log_3 9^2$$

څرنګه چې د لوګاریتمونو قاعدې سره مساوي دي، نوعددونه هم یوله بل سره مساوي دي.

$$x+2=9^2 \Rightarrow x=81-2$$
$$x=79$$

دریم مثال: په $\log_{\sqrt{5}} x-\log_{\sqrt{5}} 3-\log_{\sqrt{5}} 5+\log_{\sqrt{5}} 4=0$ لوګاریتمي معادله کې د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د دوو عددونو د لوګاریتم د ضرب او وېش په کارولو سره پورتنی معادله په لاندې ډول لیکو :

$$\log_{\sqrt{5}} x=\log_{\sqrt{5}} 3+\log_{\sqrt{5}} 5-\log_{\sqrt{5}} 4=\log_{\sqrt{5}}\frac{3\cdot 5}{4}=\log_{\sqrt{5}}\frac{15}{4} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{15}{4}$$

څلورم مثال: په $\log_3(3^{2x}+2)=x+1$ معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

حل:

$$\log_3(3^{2x}+2)=x+1 \Rightarrow 3^{2x}+2=3^{x+1}$$
$$3^{2x}-3^{x+1}+2=0 \Rightarrow 3^{2x}-3\cdot 3^x+2=0$$
$$(3^x)^2-3\cdot 3^x+2=0$$

که $3^x=t$ وضع کړو،نو:

$$t^2-3t+2=0 \Rightarrow (t-1)(t-2)=0$$
$$t_1=1 \quad , \quad t_2=2$$

$$3^x=t_1=1 \Rightarrow 3^x=3^0 \Rightarrow x_1=0$$
$$3^x=t_2=2 \Rightarrow \log_3 2=x \Rightarrow x_2=\log_3 2$$

پنځم مثال:په لاندې لوګاریتمي معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

$$\log(x^2+36)-2\log(-x)=1$$

حل:

$$\log(x^2+36)-\log(-x)^2=1$$

$$\log\frac{x^2+36}{x^2}=\log 10 \Rightarrow \frac{x^2+36}{x^2}=10$$

$$x^2+36=10x^2 \Rightarrow 10x^2-x^2-36=0$$

$$9x^2=36 \Rightarrow x^2=4$$

$$x_{1,2}=\pm 2 \quad , \quad x_1=2 \quad , \quad x_2=-2$$

پوښتنې

په لاندې لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلو کې د x قیمت په لاس راوړئ.

$a)$ $(11)^{3x-1}=11$

$b)$ $7^{2x-1}=3^{x+3}$

$c)$ $\log\sqrt{x}+3=4$

$d)$ $\log_5\frac{x-1}{x-2}=2$

دریاضیکی عملیوپه سرته رسولوکې له لوګاریتم څخه کار اخېستنه

آیا کولای شو د اعشاری عددونو عملیې لکه ضرب، تقسیم، توان او جذر د لوګاریتم په کارولو سره په اسانه سرته ورسوو.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{28.8}{78.8}\\[4pt] 3.17\cdot 88.2\end{array}\right\} = ?$$

د ضرب حاصل پیدا کول د لوګاریتم په مرسته: کولای شو دووو یا څو عددونو د ضرب حاصل، د لوګاریتم د لاندې قانون له مخې پیدا کړو: $\log(M\cdot N)=\log M+\log N$

لومړی مثال: غواړو چې د $3.17\cdot 88.2$ عددونو د ضرب حاصل د لوګاریتم په مرسته پیدا کړو.

حل: د ضرب د قانون په اساس لیکلای شو:

$$\log(3.17\cdot 88.2)=\log 3.17+\log 88.2$$
$$=0.5011+1.9455=2.4466$$

لیدل کېږي چې د0.4466 مانتیس عدد په جدول کې نشته، خود 0.4456 او0.4472 مانتیسونو عددونه په جدول کې شته.

له جدول څخه لیدل کېږي چې:

$$anti\log 0.4456=2.79$$
$$anti\log 0.4472=2.80$$

$$\begin{array}{cc} & \text{عددونه} \quad\quad \text{مانتیسونه} \\ \text{د عددونو توپیر } 0.01 & \left[\begin{array}{l} \;\;2.79 \quad\quad 0.4456 \\ d\left[\begin{array}{ll} t & 0.4466 \\ 2.80 & 0.4472 \end{array}\right] 0.0006 \end{array}\right] 0.0016 \text{ د مانتیسونو توپیر} \end{array}$$

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0006}{0.0016}\Rightarrow d=\frac{0.0006\cdot 0.01}{0.0016}=\frac{0.00006}{0.0016}$$
$$d=0.00375$$

د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو:

$$t = 2.79 + 0.00375 = 2.79375$$

$$\log x = \log(2.79375 \cdot 10^2) \Rightarrow x = 297.375$$

په داسې حال کې چې $anti\log 2.4466 = 297.375$ دی، نو: $3.17 \cdot 88.2 = 297.375$

آیا پوهیږی؟

ددوو یا څو عددونو د ضرب لپاره لومړی د لوګاریتم د جمعې حاصل پیدا کوو ، وروسته یې انتي لوګاریتم په لاس راوړو چې دغه انتي لوګاریتم د نومړو عددونو د ضرب حاصل تشکیلوي.

فعالیت

- د $74.2 \cdot 62$ د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه پیدا کړئ.

د خارج قسمت پیدا کول د لوګاریتم په مرسته:

کولای شو د لوګاریتم له څلورم قانون څخه په کار اخیستنې سره ، د دوو اعشاري عددونو دتقسیم حاصل په لاس راوړو یعني: $\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$

مثال: غواړو د $\frac{8750}{3.49}$ خارج قسمت د لوګاریتم پواسطه پیداکړو.

حل:

$$\log \frac{8750}{3.49} = \log 8750 - \log 3.49$$

د لوګاریتم له جدول څخه لروچې:

$$\log 8750 = 3.9420$$

$$\log 3.49 = 0.5428$$

$$\log 8750 - \log 3.49 = 3.9420 - 0.5428 = 3.3992$$

$$anti\log 3.3992 = 2507$$

$$\frac{8750}{3.49} = 2507$$

يادونه: ددوو عددونو د خارج قسمت د حاصل پيداکولو لپاره لومړی دمقسوم له لوگاريتم څخه د مقسوم عليه لوگاريتم کموو، وروسته ددغه تفاوت انتي لوگاريتم په لاس راوړو چې داد مطلوب خارج قسمت حاصل دی.

فعاليت

- د $\frac{374}{16.2}$ حاصل د لوگاريتم په مرسته په لاس راوړئ.

د لوگاريتم په واسطه د توان لرونکي عدد محاسبه:

د هغو توان لرونکوعددونومحاسبه چې توانونه يې تام اوياکسرونه وي، د لوگاريتم له پنځم قانون څخه کار اخلو يعني $\log M^n = n\log M$

مثال: غواړو چې د $(1.05)^6$ عدد محاسبه کړو.

حل:

$$\log(1.05)^6 = 6\log 1.05 = 6(0.0212)$$
$$= 0.1272$$

بناپردی $anti\log 0.1272 = 1.340$

په لنډ ډول ويلای شوچې: ديوه توان لرونکي عدد قيمت پيداکولو لپاره لومړی د عدد توان په لوگاريتم کې ضربوو، ددغه حاصل ضرب انتي لوگاريتم د توان لرونکي عدد قيمت دی.

فعاليت

- د $(694)^{\frac{2}{3}}$ عدد قيمت د لوگاريتم په واسطه پيداکړئ.

پوښتنې

1. لاندې د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2. لاندې د تقسیم حاصل د لوګاریتم په واسطه حساب کړئ.

$a)\ \dfrac{8}{737} = ?$ $\qquad b)\ \dfrac{32.2}{25.1} = ?$

3. لاندې توان لرونکي عدد دلوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = ?$$

د څپرکي مهم ټکي

اکسپوننشیل تابع: که a یو مثبت عدد او $a \neq 1$ وي، نو د $f(x) = a^x$ تابع اکسپوننشیل تابع د a په قاعده نومیږي.

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه:

- د اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه حقیقي عددونه او دقیمتونو ناحیه يې مثبت حقیقي عددونه دي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د اکسپوننشیل تابع گراف چې $a \neq 1$ وي، منحني يې د $(0،1)$ له ټکي څخه تیریږي.
- د اکسپوننشیل تابع گراف نظر y محور ته متناظر واقع دی.
- هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوس تابع يې $Log_a x$ دی.

لوگاریتمي تابع: $y = \log_a x$ چې د $y = a^x$ اکسپوننشیل تابع معکوس دی، د لوگاریتمي تابع په نامه یادیږي.

دلوگاریتمي تابع خواص

- دلوگاریتمي تابع د قیمتونو ساحه مثبت حقیقي عددونه تشکیلوي.
- د لوگاریتمي تابع گراف په قایمو مختصاتو کې د $(1،0)$ له ټکي څخه تیریږي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تابع $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د هرې لوگاریتمې تابع $f(x) = \log_a x$ مجانب، د y محور دی.

د لوگاریتم قوانین:

- لومړی قانون $\log_a a = 1$
- دویم قانون $\log_a 1 = 0$
- دریم قانون $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- خلورم قانون $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- پنځم قانون $\log_a x^n = n \log_a x$
- شپږم قانون $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$
- اووم قانون $\frac{\log_a M}{\log_a b} = \log_b M$
- اتم قانون $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

د لوګاریتم ډولونه:

معمولې لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې 10 وي، معمولي لوګاریتم یا اعشاري (Brigys) لوګاریتم بلل کیږي چې د (log) په سمبول سره ښودل کیږي.

طبیعي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي، د طبیعي لوګاریتم په نامه یادیږي، چې طبیعي لوګاریتم د ln په سمبول ښودل کیږي یعنې $\log_e x = \ln x$

کرکټرستیک او مانتیس

کرکټرستیک که چیرې $\log x = n + \log S$ وي داسې چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد دی n د مشخصې یا کرکټرستیک په نامه یادیږي چې د عدد د رقمونو له مخې ټاکل کیږي.

مانتیس: د $(\log S)$ اعشاري برخه د مانتیس په نامه یادیږي چې د جدول له مخې ټاکل کېږي، مانتیس یو مثبت عدد د صفر او یوه ترمنځ دی.

انتــي لوګــاریتم (antilogarithm): کـه $\log_a y = x$ وي، نـو y د x د لوګـاریتم انتـي لوګـاریتم دی یعنـې

$y = anti \log x$

خطي انټرپولیشن: که یو نامعلوم عدد ددوو معلومو عددونو په منځ کې واقع وي او د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، پدې صورت کې دا طریقه د خطي انټرپولیشن په نامه یادیږي.

اکسپوننشیل او لوګاریتمی معادلې

- **اکسپوننشیل معادلې** هغه معادلې چې په هغې کې د حدونو، توانونـه مجهـول وي، د اکسپونـنـشیل معـادلې پـه نامـه یادیږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره د طاقت له قوانینو څخه ګټه اخلو.
- **لوګاریتمي معادلې** هغه لوګاریتمي مساوات چې پـه هغـوی کـې مجهـول موجـودوي، د لوګـاریتمي معـادلو پـه نامـه یادیږي.

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په غور ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا اوله هغه څخه کرې تاو کړئ.

1. $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})$ مساوي له څو سره دی؟

$a)\ 4$ $b)\ -4$ $c)\ 3$ $d)\ -3$

2. د $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ اړيکه کې د b قيمت عبارت دی له:

$a)\ \frac{1}{4}$ $b)\ 81$ $c)\ \sqrt{81}$ $d)\ -4$

3. د $\log_3 81 - \log 0.01$ افادې قيمت په لاس راوړئ.

$a)\ 0$ $b)\ 4$ $c)\ 8$ $d)\ 9$

4. د x قيمت په $\log 81 - \log 2x = \log 3$ افاده کې مساوي له څو سره دی.

$a)\ 2$ $b)\ 3$ $c)\ 4$ $d)\ 5$

5. $\log_2 16 = ?$

$a)\ 4$ $b)\ 3$ $c)\ 5$ $d)\ -4$

6. $\log_{\frac{1}{5}} 125$

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 4$ $d)\ 5$

7. د $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ قيمت عبارت دی له :

$a)\ \frac{1}{2}$ $b)\ -\frac{1}{2}$ $c)\ 1$ $d)\ -1$

8. د x قيمت د $3^{x-1} = 9$ په معادله کې عبارت دی له :

$a)\ x=-3$ $b)\ x=9$ $c)\ x=-9$ $d)\ x=3$

9. د $\log 234.21$ مشخصه ياکرکټرستيک عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ 1$ $c)\ 2$ $d)\ 3$

10. د يوه عدد دلوگاريتم معکوس عبارت دی له:

$a)\ \log_a m = \frac{1}{\log_a m}$ $b)\ \log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$ $c)\ \log_a m = \frac{1}{\log_m a}$ $d)$ هيڅ يو

1. په لاندې معادلوکې د x قیمت پیدا کړئ

$a)\ 3^x = 3^{3x+2}$ $b)\ 3^{2x} = 9^{4x-1}$

$c)\log_3(x+2) = 2\log_3 9$ $d)\ 16^{x+1} = 64^{x-2}b$

$e) 15^{2x-1} = 7^{x+1}$ $f)\ \log\sqrt{x+1} = 1 - \frac{1}{2}\log x$

$g)\log(4x-3) = 2 - \log 20$ $h)\ \log_5(x-1) - \log_5(x-2) = \log_5 2$

2- لاندې لوګاریتمي افادې د لوګاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

$a)\log_8 3\sqrt{4} = ?$ $b)\log_3 \frac{1}{243} = ?$

$c)\log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $d)\log(\frac{8}{\sqrt{128}}) = ?$ $e)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\ \log_8\sqrt[3]{4} = ?$ $b)\ \log_3\frac{1}{243} = ?$

$c)\ \log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $d)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$ $e)\ \log\frac{8}{\sqrt{128}} = ?$

4. لاندې انتي لوګاریتمونه پیدا کړئ.

$a)\ 1.7300$ $b)\ 0.8954$ $c)\ 4.5682$ $d)\ \overline{2}.1987$

5. دلاندې هر عدد لوګاریتم حساب کړئ.

$a)\ 89500$ $b)\ 91$ $c)\ 3065.3$ $d)\ \log 0.002$

6. د لوګاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

$a)\ 2.01\cdot 52.9$ $b)\ (0.0062)(-34.8)$

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ 0.888 \div 256$ $b)\ 17.3 \div 7.47$

8. د لاندې توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ (7.42)^3$ $b)\ (-84.7)^2$ $c)\ \sqrt{418}$ $d)\ \sqrt{0.21}$

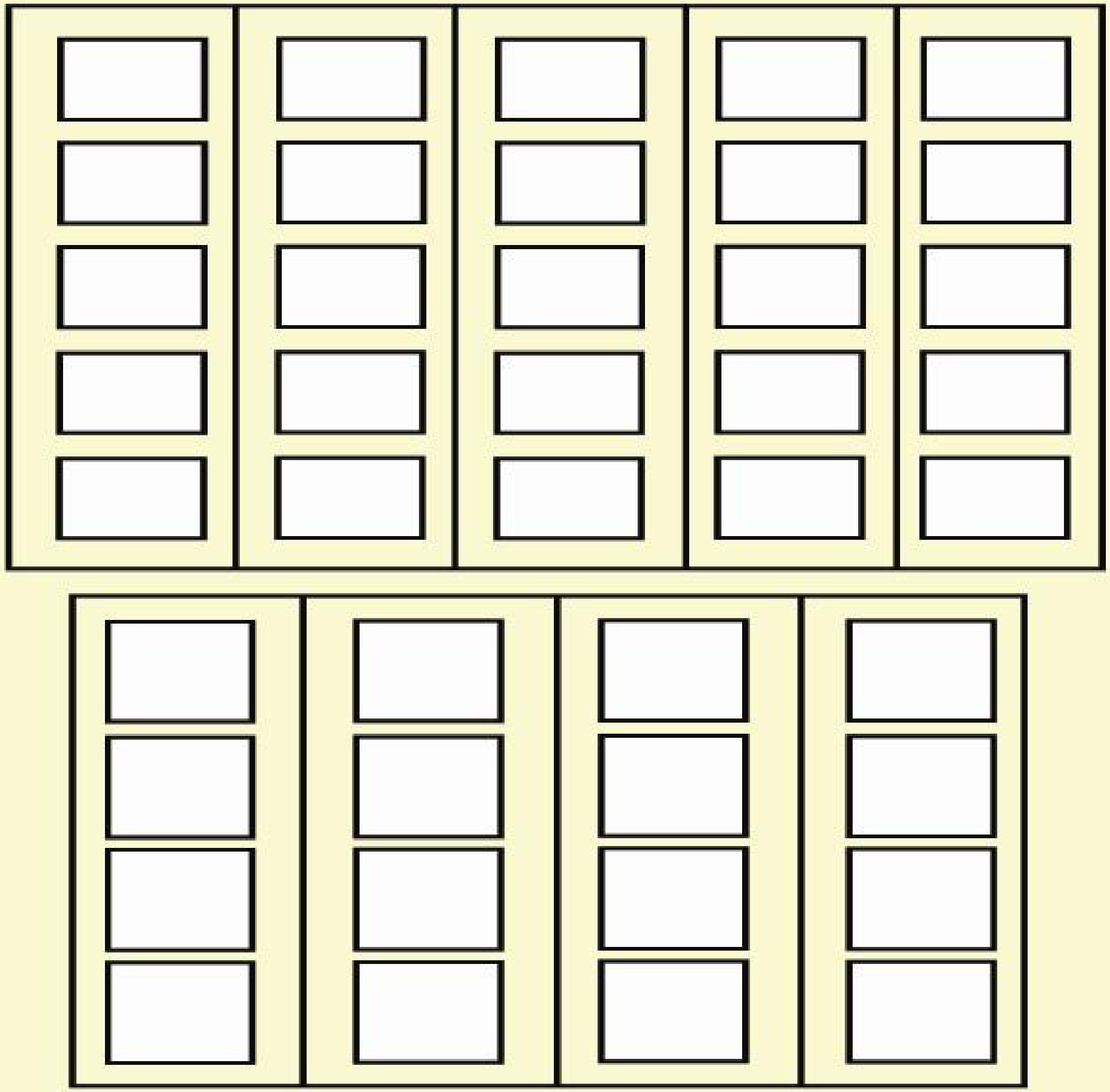
د لوګاریتم جدول چې مانتیس یې څلور اعشاري رقمونه لري

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

شپږم څپرکی

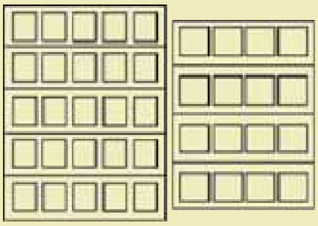
مټريکسونه



مټریکسونه

Matrixes

د څو پوړيزې ودانۍ تصوير په پام کې نيسو، هره ودانۍ څو پوړه لري، په مخامخ شکل کې وينو چې د لويې ودانۍ د کړکيو شمېر $5 \cdot 5 = 25$ دی، د کوچنۍ ودانۍ د هر پوړ کړکۍ وشمېرئ.



فعاليت

- د قايمو مختصاتو په سيستم کې د $M(x, y)$ ټکی وټاکئ.
- د M ټکي متناظر يعنې $M'(x', y')$ نظر x محور ته وټاکئ.
- د M او M' مختصاتو تر منځ اړيکې وليکئ.
- پورتنۍ اړيکې د ضريبو-نو په څېر وليکئ.
- د پورتني فعاليت ټول مراحل، د p او د هغه متناظر p'، نظر y محورته S او د هغه متناظر S' نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته سرته ورسوئ.

د پورتني فعاليت له اجراء څخه وروسته لاندې پايله ليکلای شو:

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = x' \\ 0x - 1y = y' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{M}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overset{M'}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

په دې معنی چې د M ټکی د $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ په واسطه د M' په ټکي بدل او يا اوښتی دی.

پوهېږئ چې هر يو $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ د وضعيه کمياتو په مستوي کې د يوه ټکي ستوني ښوونه ده.

او دغه جدول $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ يوه نوې وسيله ده چې د لومړي ځل لپاره تاسو له هغې سره مخامخ کېږئ.

په همدې ډول: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ هر يو د p', p او s', s دټکوبدل شوي وسيله ده.

لاندې هرې يوې وسيلې ته (چې دټکود بدلولو د بدليدو دنده په غاړه لري) مټريکس وايي.

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

تعريف: د شيانو، عددونو يا تورو ګڼډۍ چې په سطري او ستوني ډول، په يوه مستطيلي جدول کې ترتيب شي، د مټريکس (Matrix) په نامه يادېږي.

د مستطيلي جدول هر عنصر د مټريکس د عنصر په نامه يادېږي. لوی حروفونه د $A, B, C...$ مټريکس ښيي او واړه حروفونه $a, b, c...$ د مټريکس عناصر دي.

د عددونو هر يولاندی جدول يو مټريکس په ګوته کوي.

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{لومړی سطر}\\ \text{دويم سطر}\\ \text{دريم سطر}\end{array}$$

$$\begin{array}{cl} A = \begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -3 & 7 & 5\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{لومړی سطر}\\ \text{دويم سطر}\\ \text{دريم سطر}\end{array} \\ \begin{array}{ccc} \text{لومړی ستون} & \text{دويم ستون} & \text{دريم ستون}\end{array} & \end{array}$$

$$C = \begin{pmatrix}0 & \frac{4}{3} & 7 & -2\end{pmatrix} \ \text{سطر}$$

که چيرې a د يوه مټريکس په $i-$ام سطر او $j-$ام ستون کې ځای ولري، هغه د a_{ij} په شکل ښوول کېږي چې i او j طبيعي عددونه دي، په ترتيب سره د سطر او ستون له شمېر څخه ښکارندويي کوي.

$i=1,2,3...$, $j=1,2,3...$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n}\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots a_{mn}\end{pmatrix}$$

د میټریکس مرتبه: که د A د میټریکس د سطرونو شمېر m او د ستونونو شمېر یې n وي، وایو چې د A میټریکس مرتبه د $m\times n$ څخه عبارت دی او داسې ویل کېږي m په n کې میټریکس او لیکو $A=(a_{ij})_{m\times n}$ د هر میټریکس د سطرونو او ستونونو شمېر د همغه میټریکس مرتبه ښیي.

فعالیت

- د لاندې میټریکسونو مرتبه وټاکئ.

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\-1&5\\1&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&5&6\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

پاملرنه وکړئ، هغه میټریکس چې یو سطر او یو ستون لري یعني $A=(X)_{1\times1}$ ، نو د A میټریکس د هغه له داخلي عدد سره مساوي دی. $A=(7)_{1\times1}=7$

مثال: لاندې میټریکسونه د مستطیلي جدول په ډول ولیکئ.

$a)\quad (a_{ij})_{2\times2}=(i+j)_{2\times2}$ $\qquad b)\quad (a_{ij})_{3\times2}=(i\cdot j)_{3\times2}$

حل: د پورتني هر مثال د حل لپاره لومړی د میټریکس عمومي شکل لیکو، د a جزء د میټریکس عمومي شکل 2×2 کې یو میټریکس دی.

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$$

$a_{ij}=i+j$

$a_{11}=1+1=2\ ,\ a_{12}=1+2=3\ ,\ a_{21}=2+1=3\ ,\ a_{22}=2+2=4$

په پایله کې غوښتل شوی میټریکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$

د b جزء): د b جزء د میټریکس عمومي شکل یو (3×2) کې میټریکس دی، یعنې 3 سطره او 2 ستونه لري.

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$$

$a_{11}=1\cdot1=1\ ,\ a_{21}=2\cdot1=2\ ,\ a_{31}=3\cdot1=3$

$a_{12}=1\cdot2=2\ ,\ a_{22}=2\cdot2=4\ ,\ a_{32}=3\cdot2=6$

په پایله کې غوښتل شوی مټریکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

دوه، هم مرتبه مټریکسونه هغه وخت سره مساوي دي چې د هغوی هر عنصر یو په یو سره مساوي وي،

مثلاً: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$ هغه وخت یوله بل سره مساوي دي چې $a = -1$ او $b = 2$ وي، آیا $(1 \quad 2)$ او $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ مټریکسونه یوله بل سره مساوي دي اوکه نه؟ ولې؟

پوښتنې

1. د لاندې مټریکسونو مرتبې ولیکئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. لاندې مټریکسونه د مستطیلي جدول په شکل ولیکئ.

$a)\ (a_{ij})_{3\times3} = (2i+3j)_{3\times3}$ $\qquad b)\ (a_{ij})_{2\times3} = (\frac{i}{j})_{2\times3}$

د مېټريکسونو ډولونه

د مېټريکسونومخامخ شکلونه څو سطرونه اوڅوستونونه لري؟
آياصفرونه دمېټريکس عناصر کيداى شي؟

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (4 \;\; 5 \;\; 6) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. **سطري مېټريکس**(Row Matrix)**:** هغه مېټريکس چې يوازې او يوازې يو سطر ولري، سطري مېټريکس يې بولي، مثلاً:

$$A = (4 \quad 5 \quad 9 \quad 0)_{1\times 4}$$

2. **ستوني مېټريکس** (Column Matrix)**:** هغه مېټريکس دى چې يوازې يو ستون ولري، د ستوني مېټريکس په نامه ياديږي، مثلاً:

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

3. **صفري مېټريکس**(Null matrix): هغه مېټريکس چې ټول عناصرېې صفرونه وي، له صفري مېټريکس څخه عبارت دى او د $0_{m\times n}$ په شکل يې ښيي.

$$0_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad 0_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

4. **مربعي مېټريکس**(Square Matrix)**:** که چيرې په يوه مېټريکس کې د سطرونو شمېر د ستونونو له شمېرسره برابر $(m = n)$ شي، د مربعي مېټريکس په نامه ياديږي، مثلاً:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad , \qquad m = n \;\Rightarrow\; 3 = 3$$

هر مربعي مېټريکس دوه قطرونه لري.

هغه قطر چې عناصر يې $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ وي، اصلي قطر(Mean diagonal) او هغه قطر چې عناصر يې $a_{1n}, \ldots, a_{n1}$ وي، فرعي قطر (Minor Diagonal) بلل کېږي.

$$\begin{array}{ccc} \text{اصلي قطر} & & \text{فرعي قطر} \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{فرعي قطر} & & \text{اصلي قطر} \\ \end{array}$$

فعاليت

- داسې مېټريکسونه وليکئ چې مرتبې يې 3×1 ، 1×4 وي، دا څه ډول مېټريکسونه دي؟

5. **قطري مېټريکس** (Diagonal Matrix)**:** هغه مېټريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، د قطري مېټريکس په نامه يادېږي.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad ، \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

6. **سکالر مېټريکس** (Scalar Matrix)**:** هغه قطري مېټريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره مساوي وي، د سکالر مېټريکس په نامه يې يادوي، لکه:

$$A=\begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & K & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & K & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & K \end{pmatrix}_{m\times n}$$

7. **واحد مېټريکس** (Unite Matrix)**:** که چېرې په يو سکالر يا قطري مېټريکس کې د اصلي قطر ټول عناصر د (1) عدد وي، دغه ډول مېټريکس ته واحد مېټريکس وايي او په I_n سره ښوول کېږي.

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0\ldots 1 \end{pmatrix}$$

فعالیت

- یو د 3×3 مرتبې مټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر یې صفرونه وي.
- په همدې ډول یو د 3×3 مرتبې مټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر پورتني عناصر یې ټول صفرونه وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانېږي:

که چیرې په یوه مربعي مټریکس کې د اصلي قطر پورتني او یا ښکتني ټول عناصر یې صفرونه وي، په دغه صورت کې مټریکس د مثلثي مټریکس (Triangular matrix) په نامه یادېږي.

که چیرې د اصلي قطر پورتني ټول عناصر صفرونه وي، د پورتني مثلثي مټریکس (Upper triangular matrix) او که چېرې د اصلي قطر ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، د ښکتني مثلثي مټریکس (lower triangular matrix) په نامه یادېږي.

په لاندې مثالونو کې A یو پورتنی مثلثي مټریکس او B ښکتنی مثلثي مټریکس دی.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&7&9\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&9\\0&0&4\end{pmatrix}$$

متقابل (متضاد) مټریکس:

که چیرې د A متقابل مټریکس په $(-A)$ سره وښودل شي نو، دا هغه مټریکس دی چې هر عنصر د A د متناظر عنصر متضاد دی. که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو مټریکس وي، نومتقابل(متضاد) مټریکس یې $(-A)$ په لاندې ډول تعریفېږي:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\overset{\text{متقابل}}{\Rightarrow}-A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

لکه په لاندې مثال کې:

$$A=\begin{pmatrix}2&4&5\\-1&2&0\\2&-3&-4\end{pmatrix}\Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-2&-4&-5\\1&-2&0\\-2&3&4\end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. لاندې متریکسونه په پام کې ونیسئ، مرتبې او اړوند نومونه یې وټاکئ:

$a)\ A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $b)\ B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $c)\ C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$d)\ D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $e)\ E=\begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ $f)\ F=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

$g)\ G=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $h)\ H=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

د مېټريکسونو جمع او تفريق

Addition and subtraction of Matrix

په مخامخ مېټريکسونو کې د هغوی د جمعې او تفريق په اړه د امکان په صورت کې څه ويلای شئ.

$$\left.\begin{array}{l} A+A= \\ A-A= \\ A+B= \\ A-B= \\ B+B= \\ B-B= \end{array}\right\} ?$$

1) **د مېټريکسونو جمع**:

که چیرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دوه مېټريکسونه وي، نو $A+B=C$ عبارت له هغه مېټريکس څخه دی چې د C_{ij} هر عنصر يې د a_{ij} او b_{ij} د جمعې له حاصل څخه لاس ته راغلی وي، يعنې د دوو مېټريکسونو جمع کول يوازې هغه وخت امکان لري چې د دواړو مېټريکسونو مرتبې سره مساوي وي. څرنګه چې C_{ij} د دوو حقيقي عددونو د جمعې حاصل دی، نو:

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\Rightarrow (a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(C_{ij})_{m\times n}$$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7+(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=C_{3\times 2}$$

2. **د مېټريکسونو تفريق**:

د جمعې عمليې ته ورته کولای شو، د دوو مېټريکسونو تفاضل يا د تفريق حاصل په لاس راوړو. که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ وي، نو د تفريق حاصل يې په لاندې ډول په لاس راوړای شو:

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

فعاليت

- که $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ وي، $A-B$ په لاس راوړئ.

د متریکسونو د جمعې او تفریق خاصیتونه:

1. د متریکسونو جمع کول دبدلون خاصیت لری، خو د متریکسونو تفریق د بدلون خاصیت نه لري، یعنې:

$A+B=B+A$

$A-B\neq B-A$

2. د متریکسونو جمع او تفریق اتحادی خاصیت لری. $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$

3. د عینیت عنصر (Identity Element) د متریکسونو په جمع کې صدق کوي ،خو د متریکسونو په تفریق کې صدق نه کوي. $A+0=0+A=A$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو متریکسونو مرتبه سره برابره (3×3) ده، نو کولای شو د تفریق حاصل یې په لاس راوړو.

$$A-B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-11&2-1&3-5\\2&-0&5-3&4-0\\6&-2&0-5&1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&1&-2\\2&2&4\\4&-5&-5\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د یوه مثال په واسطه وښایاست چې $A-B\neq B-A$ دی.

دویم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&6\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&5&-1\end{pmatrix}$ وي، د امکان په صورت کې $A+B$ او $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې د A او B متریکسونو مرتبې سره خلاف دی، له دې امله یې جمع او تفریق امکان نه لري، ځکه د A د متریکس مرتبه 3×2 او د B متریکس مرتبه 2×3 ده.

پوښتنې

لاندې متریکسونه د امکان تر حده جمع او تفریق کړئ:

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$, c) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$

په مېټريکس کې د سکالر ضرب

مـوږ د مېټریکسونو د جمعې او تفریق قاعـده ولیدلـه، کـه $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یـو **مېټریکس** او K یـو سـکالر وي، د هغوی د ضرب حاصل په اړه څه فکر کوئ.

$$K\cdot A=K\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ یو **مېټریکس** او k یو سکالر وي، د $K\cdot A$ حاصل په لاس راوړئ.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad , \quad KA=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- د $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **مېټریکس** په کوم عدد کې ضرب شي، تر څوېې د ضرب حاصل یو واحد مېټریکس شي.

کولای شو د فعالیت له اجراء وروسته یې په لاندې ډول تعریف کړو.

تعریف: که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو **مېټریکس** او $K\in IR$ یو حقیقي عدد وی، نو د KA د C له **مېټریکس** څخه عبارت دی، داسې چې د C_{ij} هر عنصر د K د ضرب حاصل په a_{ij} کې دی.

$$C_{ij}=K(a_{ij})$$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ او $K=2$ وي، د KA د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:
$$K\,A=2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot3 & 2\cdot6 \\ 2\cdot2 & 2\cdot1 & 2\cdot0 \\ 2\cdot1 & 2\cdot0 & 2(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

په متریکس کې د سکالر ضرب خاصیتونه:

که چیرې A او B دواړه د یو شان مرتبې متریکسونه، α او β دوه حقیقي عددونه وي، نو:

$a)\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$b)\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$c)\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

دویم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\beta=2$ راکړل شوي وي، وښایاست چې

$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

حل:

$$\alpha(\beta A)=3\left[2\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}2\cdot 3 & 2\cdot 6\\ 2(-3) & 2\cdot 9\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}6 & 12\\ -6 & 18\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 6 & 3\cdot 12\\ 3(-6) & 3\cdot 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\beta)A=(3\cdot 2)\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\cdot 3 & 6\cdot 6\\ 6(-3) & 6\cdot 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha A)=2\left[3\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=2\begin{pmatrix}3\cdot 3 & 3\cdot 6\\ 3(-3) & 3\cdot 9\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}9 & 18\\ -9 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$$

پوښتنې

1. که چیرې $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha=2$ او $\beta=1$ راکړل شوي وي. په متریکس کې د سکالر ضرب درې خاصیتونه تطبیق کړئ؟

2. که $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $K=3$ وي، KA او $\frac{1}{K}A$ پیدا کړئ.

د دوو مېټريکسونو ضرب

Multiplication of two Matrixes

آياد دوو مېټريکسونو د ضرب لپاره کوم نظر ورکولای شئ؟
تاسو د دوو مېټريکسونو د جمعې لپاره پيدا کړل چې $A+B=B+A$ دی، د مېټريکسونو د ضرب لپاره څه فکر کوئ؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=?$$

تعريف

دوه مېټريکسونه د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ په پام کې ونيسئ، د دې لپاره چې دا داوړه مېټريکسونه يو په بل کې ضرب شي، نو بايد د لومړي مېټريکس د ستونونو شمېر د دويم مېټريکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي. د مېټريکسونو د ضرب حاصل بيا هم يو مېټريکس دی ،لکه: $C=(a_{ij})_{m\times p}$ چې د سطرونو شمېر يې د لومړي مېټريکس د سطرونو په اندازه او د ستونونو شمېر يې د دويم مېټريکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

د دوو مېټريکسونو د ضرب لپاره په لاندې ډول کړنه کوو:

د لومړي مېټريکس لومړی سطر د دويم مېټريکس په ټولو ستونو کې په وار سره ضربوو او په همغه سطر کې يې ليکو، په دويمه مرحله کې بيا هم د لومړي مېټريکس دويم سطر د دويم مېټريکس په ټولو ستونونو کې په وار سره ضربوو او په همغه(دويم سطر) کې يې ليکو، دغه عمل ته تر هغه دوام ورکوو، ترڅو ټول سطرونه د لومړي مېټريکس په دويم مېټريکس کې ضرب شي، په دغه ډول د مېټريکسونو د ضرب حاصل محاسبه کېږي. دغه مطلب کولای شو په لاندې ډول وښيو.

$$(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=(C_{ij})_{m\times p}$$

لومړی مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل: د دوو مټریکسونو د ضرب له تعریف څخه پوهېږو:

دویم پړاو

لومړی پړاو

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot0+0\cdot(-1) \\ -1\cdot1+0\cdot0+1\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

دویم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، نو $A\cdot B$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: بیا هم د مټریکسونو د ضرب له تعریف څخه په کار اخیستنې لرو چې:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} (2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} & (2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} & (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1+3\cdot2+(-1)(-1) & 2\cdot3+3\cdot0+(-1)\cdot2 \\ (-2)(1)+1\cdot2+2(-1) & -2(3)+1\cdot0+2\cdot2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2+6+1 & 6+0-2 \\ -2+2-2 & -6+0+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

دریم مثال: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ وي $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل :

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot3+3\cdot6 & 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot0+3\cdot7 \\ 5\cdot3+2\cdot6 & 5\cdot2+2\cdot1 & 5\cdot0+2\cdot7 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3+18 & 2+3 & 0+21 \\ 15+12 & 10+2 & 0+14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21 & 5 & 21 \\ 27 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$ وي، د ضرب دحاصل دشتون په صورت کې AB او BA پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

څلورم مثال: که $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ او $D=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ وي، CD او DC پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

حل:

$$CD=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(-3)+(-1)(-4) & 2\cdot 4+(-1)(-3)\\ 1(-3)+2(-4) & 1\cdot 4+2(-3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 8+3\\ -3-8 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

$$DC=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot 2+4\cdot 1 & (-3)(-1)+4\cdot 2\\ -4\cdot 2+1\cdot(-3) & -4(-1)+(-3)\cdot 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 3+8\\ -8-3 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

معلومېږي چې $CD = DC$ دی.

د مېټریکس د ضرب خواص:

لومړی خاصیت: په عمومي ډول د دوو مېټریکسونو په ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي.

یعنې که A او B دوه مېټریکسونه او AB او BA تعریف شي، نو: $AB\neq BA$

په ځانګړي حالت کې د $m\times m$ مرتبې مېټریکسونه د تبدیلی خاصیت لري.

دویم خاصیت: د مېټریکسونو د ضرب د ضرب اتحادي خاصیت لري. که چیرې B,A او C د $m\times n$ مرتبې مېټریکسونه وي، نو $(AB)C=A(BC)$

دریم خاصیت: د مېټریکسونو ضرب توزیعي خاصیت د جمعې او ضرب لپاره لري، نو لرو:

$a)\ \ A(B+C)=AB+AC$

$b)\ \ (A+B)C=AC+BC$

$c)\ \ K(AB)=(KA)B=A(KB)\ ,\quad K\in IR$

$d)\ \ IA=AI=A$

پوښتنې

د لاندې مېټريکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$b)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = ?$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

د یوه مېټریکس ترانسپوز مېټریکس

Transpose of Matrix

که په یو مېټریکس کې سطرونه په ستونونو او ستونونه په سطرونو بـدل شـي نـوي مېټریکس چې پـه لاس راځي په څه نوم یادېږي.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ مېټریکس په پام کې ونیسئ، سطرونه ستونونوته او ستونونه سطرونو تـه ولېـږدوی، هغـه نوی مېټریکس چې په لاس راځي وېې لیکئ.
- که چیرې د یوه مېټریکس د سطرونو او ستونونو ځایونه یوله بل سره بدل کړو(افقي لیکې په عمودي او عمودي په افقي واړوو)، هغه نوی مېټریکس چې لاس ته راځي، آیا له لومړی مېټریکس سره مساوي دي، نوی مېټریکس په څه نوم یادېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: که چیرې د یوه مېټریکس چې مرتبه یې $(m\times n)$ وي، سطر په ستون او ستون په سطر واړول شي، هغه نوی مېټریکس چې په لاس راځي، له ټرانسپوز(Transpose) مېټریکس څخه عبارت دی، د A ترانسپوز مېټریکس په A^T ښودل کېږي. د ترانسپوز مېټریکس مرتبه $(n\times m)$ ده.

مثلاً: که چیرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}_{2\times 3}$ وي، نو ترانسپوز مېټریکس یې عبارت دی له: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}_{3\times 2}$، که یـو ترانسپوز مېټریکس یعنې A^T له خپل ځان یعنې A سره مـساوي شـي، نـو پـه دې صـورت کـې A مېـټریکس تـه متناظر مېټریکس (Symmetric Matrix) وایي.

مثلاً: $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$ یو متناظر مېټریکس دی، ځکه: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T=A$

د متناظر مېټریکس پېژندل: په متناظرو مېټریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته متناظراو مساوي دي:

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & f\\ c & f & d\end{pmatrix}$$

د ترانسپوز متریکس خواص:

لومړی خاصیت: د یوه ترانسپوز متریکس ترانسپوز له خپل لومړي متریکس سره مساوي دی.

$$(A^T)^T = A \Rightarrow \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$$

دویم خاصیت: د دوو یا څو ترانسپوز متریکسونو د جمعې او تفریق حاصل د دوی د هر یوه د جمعې او تفریق له ترانسپوز متریکسونو سره مساوی دی. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

او یا په عمومي ډول $(A \pm B \pm C \pm \ldots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \ldots$

دریم خاصیت: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

څلورم خاصیت: $(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad , \quad \alpha \in IR$

$(-A)^T = -A^T$

فعالیت

- که چیرې $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، وښایاست چې:

$$(A-B)^T = A^T - B^T \quad , \quad (A+B)^T = A^T + B^T$$

مثال: د لاندې متریکسونو ترانسپوز متریکسونه په لاس راوړئ.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

پوښتنې

1. د A او B متریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ترانسپوز متریکسونه په لاس راوړئ.

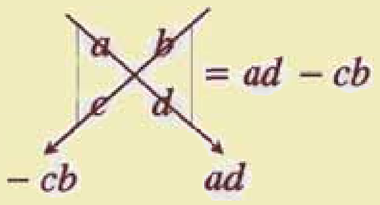
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

2. په پورتنیو متریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ترانسپوز متریکس 4 خاصیتونه وښایاست.

دیترمېنانت

Determinant

پـه یـوه عـددي مثـال کـې یـو مربعي مټـریکس داسـې وټاکئ چې د $ad-bc$ حاصل تفریق مساوي په صفر شي.



تعریف

که چیرې د A مټریکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مټریکس له دیترمېنانت څخه عبارت دی، د $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ د مټریکس دیترمېنانت په $|A|$، det A او یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ په ډول ښوول کېږي.

پـه همـدې ډول کـه چیـرې د $n\times n$ مرتبـې یـو مټـریکس چـې n سـطرونه او n سـتونونه ولـري، اړونـد دیترمېنانت یې له n درجې څخه دی. د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یو مربعـي مټـریکس پـه پـام کـې نیـسو او د تعریـف سره سم لرو چې:

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

د 2×2 مرتبې مټریکسونو د دیترمېنانت محاسبه: د $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مټریکس دیترمېنانت په لاندې ډول تعریفوو.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

مثال: د $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ مټریکس دیترمېنانت حساب کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-7\cdot 4=6-28=-22$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ مټریکس دیترمېنانت محاسبه کړئ.

د 3×3 مېټريکسونو د ديټرمېنانټ محاسبه: د $A_{3\times 3}$ مېټريکس، ديټرمېنانټ په پام کې نيسو:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حل: د $A_{3\times 3}$ ديټرمېنانټ د محاسبې لپاره لاندې ګامونه په پام کې نيسو:

لومړی پړاو: اول ستون او دريم سطر له منځه ورو(حذفوو)، د 2×2 مرتبې ديټرمېنانټ محاسبه او د لومړي ستون او دريم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})a_{31}$$

دويم پړاو: دويم ستون او دريم سطر حذف، د 2×2 مرتبې ديټرمېنانټ محاسبه او د دويم ستون او دريم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو ، هېره دې نه وي چې د ديټرمېنانټ د محاسبې لپاره علامې په متناوب ډول بدلون مومي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})a_{32}$$

دريم پړاو: دريم ستون او دريم سطر له منځه ورو(حذفوو)، د 2×2 مرتبې ديټرمېنانټ محاسبه، د دريم سطر او دريم ستون د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})a_{33}$$

څلورم پړاو: د 1، 2 او 3 ټول پړاوونه سره جمع کوو، په دې ډول د A ديټرمېنانټ مقدار په لاس راځي.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})\,a_{31}-(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})\,a_{32}+(a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})\,a_{33}$$

$$=a_{12}\,a_{23}\,a_{31}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}+a_{21}\,a_{13}\,a_{32}+a_{11}\,a_{22}\,a_{33}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

مثال: د لاندې دیترمینانت مقدار په لاس راوړئ.

$$B=\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

حل: له تېرو معلوماتو څخه کار اخلو:

$$\text{I)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (6\cdot 2-1(-3))\cdot 4=(12+3)\cdot 4=15\cdot 4=60$$

$$\text{II)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -(2\cdot 2-5(-3))(-1)=4+15=19$$

$$\text{III)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (2\cdot 1-5(6))\cdot 7=(2-30)\cdot 7=-28\cdot 7=-196$$

$$\text{I}+\text{II}+\text{III}=60+19-196=-117$$

فعالیت

- د $A=\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ له دیترمینانت څخه د a قیمت په لاس راوړئ.

دویمه طریقه: **د ساروس په طریقه د دیترمینانت محاسبه**: په دغه طریقه کې د دیترمینانت دوه لومړي ستونونه ښي لورې ته په لاندې ډول تکرار لیکو:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

فرعي قطرونه

اصلي قطرونه

د اصلي قطر عناصر یوله بل سره ضرب او جمع کوو، په همدې ډول د فرعي قطر عناصر یوله بل سره ضربوو او وروسته یې جمع کوو، همدارنګه د اصلي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب له مجموع څخه، د فرعي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموع کموو، په دې ډول د A د مټریکس دیترمینانت مقدار په لاس راځي:

$$|A|=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

په دغه طریقه کې کولای شو د لومړی او دویم ستون د لېږد په ځای لومړی او دویم سطر د دیترمینانت لاندینی برخې ته انتقال کړو او د تېر په ډول کړنه سرته رسوو.

$$\begin{array}{r|ccc|l}
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \text{فرعي قطر} \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \text{فرعي قطر} \\
\text{اصلي قطر} & a_{31} & a_{33} & a_{32} & \text{فرعي قطر} \\
\text{اصلي قطر} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\
\text{اصلي قطر} & a_{21} & a_{22} & a_{23} &
\end{array}$$

دويم مثال: د لاندې دیترمینانت قیمت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

حل:

$$|M| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 0 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & 6 & 5 & -2 \end{array}\right|$$

$$= \big(3\cdot 3\cdot 6 + 2\cdot 0\cdot 5 + (-1)(-4)(-2)\big) - \big((-1)\cdot 3\cdot 5 + 3\cdot 0(-2) + 2(-4)\cdot 6\big)$$

$$= (54+0-8) - (-15+0-48) = 46 + 63 = 109$$

فعالیت

- لاندې د $|A|$ دیترمینانت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې دوه لومړنې سطرونه د دیترمینانت لاندې برخې ته ولېږدوئ او عملیه سرته ورسوئ.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې دیترمینانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad b)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \quad c)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad d)\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2. د لاندې دیترمینانتونو مقدار د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix}, \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

د ديترمېنانت خاصيتونه

که چيرې په يوه ديترمېنانت کې د سطر ځای له ستون سره بدل شي، د ديترمېنانت په قيمت کې تغير راځي او که نه؟

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \boxed{2 \quad 4 \quad 1} \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix} \boxed{2 \quad 4 \quad 1} \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

فعاليت

- د $|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ او $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ ديترمېنانتونه محاسبه کړئ.
- د $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ ديترمېنانت په پام کې ونيسئ، ترانسپوز يې په لاس راوړئ، وروسته يې $|A^T|$ (ديترمېنانت) محاسبه کړئ او وښاياست چې $|A^T|=|A|$.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي.

که چيرې $A_{n\times n}$ يو مېټريکس وي، د $|A|$ ديترمېنانت لپاره لاندې خواص صدق کوي.

1. که د $A_{n\times n}$ مېټريکس د يوه سطر او يا يوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو د A ديترمېنانت مساوي له صفر سره دی.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}=0 \quad , \quad |A|=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{vmatrix}=0$$

2. که چيرې د $A_{n\times n}$ مېټريکس دوه سطرونه يا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو اړوند ديترمېنانت يې مساوي له صفر سره دی.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}=0$$

3. که د $A_{n\times n}$ مېټريکس د يوه سطر او يا يوه ستون عناصر د بل سطر او يا ستون د عناصرو ګډ فکتور وي، نو $|A|=0$ دی.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}=\lambda(0)=0$$

4. د A مېټريکس ديترمېنانت او A^T مېټريکس ديترمېنانت يو له بل سره مساوي دي، په همدې ډول ديترمېنانت ځينې نور خاصيتونه يا ځانګړنې هم لري، لکه:

که چیرې په یوه دیترمېنانت کې د دوو سطرونو یا دوو ستونونو ځایونه یو له بل سره بدل شي، د دیترمېنانت اشاره بدلون مومي.

لومړی مثال: د $|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ دېترمېنانت لومړي ستون له دویم ستون سره بدل کړئ او وروسته د دواړو دېترمېنانتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow (0+6+4)-(24-4+0)=-10$$

$$B=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0+24-4)-(4+6+0)=20-10=10$$

لیدل کېږي چې د A په دیترمېنانت کې دویم ستون له لومړی ستون سره بدل شوی، په ورته ډول کولای شو،دوه سطرونه هم یوله بل سره بدل کړو،نوداسې پایله په لاس راځي: $|A|=-|B|$

که د K یو ثابت عدد په دیترمېنانت کې ضرب شي، دغه عدد یوازې په یوه سطر او یا یوه ستون کې په اختیاري ډول ضربېدلای شي. په همدې ډول کولای شو د یوه دیترمېنانت ګډعامل له یوه سطر او یا یوه ستون څخه ګډ عددوټاکوچې د دیترمېنانت ګډ فکتور بلل کېږي.

دویم مثال: د $|A|$ دیترمېنانت ګډ ضربي عامل پیدا کړئ.

$$A=\begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

حل: لیدل کېږي چې د دیترمېنانت په لومړی ستون کې د 4 عدد ګډ ضربي عامل دی چې په حقیقت کې دا عدد د دیترمېنانت ګډ ضربي عامل دی.

$$|A|=\begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 21 \\ 5 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

د دېترمېنانت دخواصو په مرسته د لاندې دېرمېنانتونو قیمت په لاس راوړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

د 2×2 مرتبي مېټريکسونو ضربي معکوس

Multiplication inverse of 2×2 *matrixes*

آيا د حقيقي عددونودضرب قاعده مو په ياد ده؟

د a حقيقي عدد ضربي معکوس کوم عدد دی؟

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

په همدې ډول د ځينو مربعي مېټريکسونو لپاره هم دا خاصيت، د مېټريکسونو د خاصيتونو په پام کې نيولو سره شتون لري.

فعاليت

- د $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ مېټريکس په پام کې ونيسئ او ديترمېنانت يې محاسبه کړئ.
- د $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ مېټريکس د A له مېټريکس سره ضرب او پايله يې وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانولای شو:

تعريف: د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ غير صفري مربعي مېټريکس په پام کې نيسو، که چېرې د B مربعي مېټريکس داسې موجود وي، چې: $AB=BA=I$

په دې صورت کې د B مېټريکس د A د مېټريکس معکوس بلل کېږي او هغه په A^{-1} سره ښيي. له دې امله ليکلی شوچې: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

په ياد ولرئ: د A مربعي مېټريکس ته منفرد مېټريکس(Singular Matrix) ويل کېږي، کله چې $|A|=0$ وي او همدارنګه د A مربعي مېټريکس ته غير منفرد مېټريکس(non singular matrix) ويل کېږي، که چېرې $|A|\neq 0$ وي.

له دې امله هغه وخت يو مېټريکس د معکوس مېټريکس لرونکی دی چې:

1. مېټريکس مربعي وي.
2. ديترمېنانت يې د صفر خلاف وي.

لومړی مثال: وښاياست چې $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ يو د بل معکوس دي.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)(-7)+3(-2) & (-1)(-3)+3(-1) \\ 2(-7)+(-7)(-2) & 2(-3)+-7(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ليدل کېږي چې: $AB=BA=I$ دی، نو A او B يو د بل معکوس دي.

الحاقي میټریکس(Ad joint of matrix): د 2×2 مرتبې الحاقي میټریکس د پیدا کولو لپاره د اصلي قطر د عناصرو ځایونه سره بدلوو او فرعي قطر د اشارې په بدلون سره لیکو، هغه نوی میټریکس چې لاس ته راځي، له الحاقي میټریکس (ad joint=adj) څخه عبارت دی، د مثال په ډول:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ K=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

هغه وخت یو میټریکس معکوس میټریکس لري چې دیترمېنانت یې د صفر خلاف وي، یعنې $|A|\neq 0$ وي. البته د بحث موضوع 2×2 مرتبې میټریکس دی چې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ Adj\ A \qquad |A|\neq 0$$

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ وي، معکوس میټریکس یې پیدا کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-18+10=8\neq 0$

لیدل کېږي چې د A میټریکس دیترمېنانت د صفر خلاف دی، نو د A میټریکس معکوس میټریکس لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{-8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

ازموینه:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

په عمومي ډول ویلی شو، د هر $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ میټریکس چې دیترمېنانت یې د صفر خلاف یعنې $|A|\neq 0$ وي، معکوس لري چې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې میټریکسونو څخه کوم یو میټریکس معکوس لري.

$a)\ \ A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad b)\ \ B=\begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

2. د لاندې میټریکسونو معکوس میټریکس په لاس راوړئ او وازموئ.

$1)\ \ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad 2)\ \ B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad 3)\ \ C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

له معکوس میټریکس څخه په کاراخېستني د خطي معادلو د سیستم حل

آیا تر اوسه مو له معکوس میټریکس څخه په ګټه اخېستنې د خطي معادلو د سیستم د حل په اړه فکر کړی دی؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

فعالیت

د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ په پام کې و نیسئ:

- د ضریبونو میټریکس، د مجهولینو میټریکس، د ضریبونو او مجهولینو میټریکس ولیکئ.
- هر میټریکس د معادلې په ډول ولیکئ.
- د لاس ته راغلي معادلې اطراف د ضریبونو د میټریکس په معکوس کې ضرب کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

څرنګه چې A د سیستم د چپ لورې د ضریبونو میټریکس، B د ښي لورې د ثابتو عددونو ستوني میټریکس او X د مجهولو عددونو ستوني میټریکس دی، نو د A^{-1} په پام کې نیولو سره سیستم داسې حلېږي:

$$A\,X = B$$

$$A^{-1} \cdot A\,X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

$$IX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

لومړی مثال: له معکوس مېټریکس څخه په کار اخېتسنې سره، د $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ خطي دوه مجهوله سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ دی.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$$

څرنگه چې د A مېټریکس دیترمېنانت د صفر خلاف دی، نو د A مېټریکس معکوس لري او په لاندې ډول يې په لاس راوړو:

$$Adj\ A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 5-2\cdot 7 \\ -1\cdot 5+1\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15-14 \\ -5+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ ,\ x=1\quad ,\qquad y=2$$

دویم مثال: له معکوس مېټریکس څخه په کار اخیستنې سره د دغه خطي معادلو $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ 3x-\ y=3 \end{cases}$ سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\ ,\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ ,\quad A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5+6=1\ \Rightarrow\ A\neq 0$$

لیدل کېږي چې $|A| \neq 0$ دی، نو A معکوس مټریکس لري.

$$AdjA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ -3\cdot 2 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 \\ -6+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ x = 4 \quad , \quad y = 9$$

دریم مثال: د x او y په کومو قمیتونوکې لاندې معادلې په یو وخت کې صدق کوي.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases}$$

د یاد شوی سیستم حل د سیستم د ضریبونو د مټریکسونو له تشکیل څخه په لاس راوړو:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

څرنګه چې د A مټریکس دیترمینانت صفر دی، نو د A مټریکس معکوس نه لري، په پایله کې ویلای شو چې سیستم حل نه لري.

پوښتنې

له معکوس مټریکس څخه په ګټه اخیستنې، د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه

Crammer's rule

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}\qquad y=\frac{|A_y|}{|A|}\qquad z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

آیا کولای شو، د ضریبونو د متریکس د دیترمینانت او له مجهولینو یعنې د z, y, x سره د متناظرو متریکسونو د دیترمینانت په واسطه د خطي معادلو د سیستم حل پیدا کړو؟

د خطي درې مجهوله معادلو سیستم په پام کې نیسو او د ضریبونو متریکس یې په A سره ښیو:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=d_1$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=d_2$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=d_3$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

کولای شو د y, x او z قیمتونه له لاندې اړیکو څخه په لاس راوړو، په داسې حال کې چې $|A| \neq 0$ وي.

$$X=\frac{|A_x|}{|A|} \quad , \quad y=\frac{|A_y|}{|A|} \quad , \quad z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

په پورتنیو اړیکو کې $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ په ترتیب سره د y, x او z اړوند متناظرو متریکسونو دیترمینانتونه دي. د هغوی د محاسبې لپاره په لاندې ډول کړنه کوو، د سیستم زیات شوي متریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

د $|A_x|$ د محاسبې لپاره د لومړي ستون(د x ضریبونو) په ځای څلورم ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دی) ځای پر ځای کوو، د 3×3 مرتبې مېټریکس دیترمېنانت په لاس راوړو او د $|A_y|$ د محاسبې لپاره د دویم ستون(د y ضریبونه) په ځای څلورم ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو او د 3×3 مرتبې د مېټریکس دیترمېنانت محاسبه کوو.او د $|A_z|$ د محاسبې لپاره دریم ستون(د z ضریبونو) په ځای څلورم ستون ځای په ځای کوو او د 3×3 مرتبې مېټریکس دیترمېنانت قیمت په لاس راوړو.

فعالیت

- له پورتنیو معلوماتو څخه په ګټې اخېستنې سره $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ پیدا کړئ.

لومړی مثال: د $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ سیستم حل د کرامر په طریقه په لاس راوړئ.

حل: $A=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-6)=1+6=7\neq 0$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دي؛ نو سیستم حل لري.

اوس زیات شوی مېټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-(-6)}{7}=\frac{3+6}{7}=\frac{9}{7}$$

$$x=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{7}=\frac{2-6}{7}=-\frac{4}{7}$$

دويم مثال: لاندي درې مجهوله سيستم د كرامر په طريقه حل كړئ.

$$\begin{cases}3x-2y+2z=-4\\ x+3y+z=5\\ 2x+2y-z=11\end{cases}$$

حل:

$$|A|=\left|\begin{matrix}3 & -2 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{matrix}\right|\begin{matrix}3 & -2\\ 1 & 3\\ 2 & 2\end{matrix}\begin{matrix}=-9-4+4-12-6-2\\ =-21-8=-29\neq 0\end{matrix}$$

څرنگه چې $|A|\neq 0$ دئ نو له دې امله سيستم حل لري.

$$|A_x|=\left|\begin{matrix}-4 & -2 & 2\\ 5 & 3 & 1\\ 11 & 2 & -1\end{matrix}\right|\begin{matrix}-4 & -2\\ 5 & 3\\ 11 & 2\end{matrix}\begin{matrix}=12-22+20-(66-8+10)\\ =10-68=-58\end{matrix}$$

$$X=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_y|=\left|\begin{matrix}3 & -4 & 2\\ 1 & 5 & 1\\ 2 & 11 & -1\end{matrix}\right|\begin{matrix}3 & -4\\ 1 & 5\\ 2 & 11\end{matrix}\begin{matrix}=-15-8+22-(20+33+4)\\ =-23+22-57=-58\end{matrix}$$

$$y=\frac{|A_y|}{A}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_z|=\left|\begin{matrix}3 & -2 & -4\\ 1 & 3 & 5\\ 2 & 2 & 11\end{matrix}\right|\begin{matrix}3 & -2\\ 1 & 3\\ 2 & 2\end{matrix}=99-20-8-(-24+30-22)$$

$$=71+16=87$$

$$z=\frac{|A_z|}{A}=\frac{87}{-29}=-3$$

میزان:

د y, x او z په لاس راغلي قیمتونه په اصلي سیستم کې وضع کوو:

$$3(2)-2(2)+2(-3)=6-4-6=-4 \quad \Rightarrow \ -4=-4$$

$$2+3(2)-3=2+6-3=8-3=5 \quad \Rightarrow \ 5=5$$

$$2(2)+2(2)-(-3)=4+4+3=11 \quad \Rightarrow \ 11=11$$

پوښتنې

د لاندې معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$$

د معادلو د سیستم حل دګوس ($Gouse$) په طریقه

آیا کولای شو له مټریکس څخه په کار اخیستنې سره د x, y او z مجهول قیمتونه پیدا کړو.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

دګوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضریبونو مټریکس او ثابت قیمتونه لیکو وروسته په سطرونو او ستونونو، باندې لومړنی عملیې(جمع، تفریق، ضرب او تقسیم) سرته رسوو، یا سطرونه او ستونونه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې دوه مجهوله له منځه ځي او دریم مجهول محاسبه کېږي ، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د مټریکس سطرونه په $R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots$ ښیو:

لومړی مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

حل:د ضریبونو مټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{لومړی سطر منفي دوم سطردتفریق حاصل په دویم سطر کې}]{R_1 - R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{دویم سطر په(1-) کې ضرب بدلون په دویم سطر کې}]{R_2 \cdot (-1) \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow y=2\,, \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ x+2(2)=5 \Rightarrow x=5-4=x=1 \end{array}$$

پاملرنه: $R_1 - R_2 \to R_2$ په دې معنا چې له لومړي سطر څخه دویم سطر تفریق شوی او په دویم سطر کې بدلون لیکل شوی دی.

$R_2(-1) \to R_2$ داسې مفهوم لري چې دویم سطر په (-1) کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.

فعالیت

- د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم دگوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

دویم مثال: د لاندې درې مجهوله معادلو سیستم دگوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+2z=11 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

حل: لومړی د سیستم د مجهولینودضریبونو او ثابتو عددونو مترېکس لیکو:

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په لومړی پړاو کې د x ضریب په دویم سطر کې له منځه وړو. داسې چې لومړی سطر په -3 کې ضرب د دویم سطر له دوه چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په دویم گام کې د x ضریب په دریم سطر کې له منځه وړو داسې چې لومړی سطر په -2 کې ضرب له دریم سطر سره جمع او په دریم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

په دریم پړاو کې د y ضریب له دریم سطر څخه حذفوو، داسې چې دویم سطر په -8 کې ضرب د دریم سطر له 7 چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{-8R_2+7R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{array}\right)$$

له دریم سطر څخه کولای شو، د z قیمت په لاس راوړو:

$$-35z=-105 \Rightarrow z=3$$

د z قمیت په دویم سطر کې وضع او د y قیمت په لاس راوړو:

$$-7y+7z=7 \Rightarrow -7y+21=7 \Rightarrow -7y=-14 \quad , \quad y=2$$

په دریم پړاو کې د y او z قیمتونه په لومړي سطر کې ایږدو او x په لاس راځي.

$$2x+3y-z=5 \Rightarrow 2x+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2x+3=5$$

$$2x=5-3=2 \quad , \quad x=1$$

د خطي معادلو د سیستم حل عبارت دی له: $(x,y,z)=(1,2,3)$

دریم مثال: د لاندې خطي معادلاتو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$2x_1+4x_2+6x_3=18$$
$$4x_1+5x_2+6x_3=24$$
$$2x_1+7x_2+12x_3=40$$

حل:

$$\left(\begin{array}{ccc:c}2&4&6&18\\4&5&6&24\\2&7&12&40\end{array}\right)\xrightarrow[-2R_1+R_2\to R_2]{\text{لومړی پړاو}}\left(\begin{array}{ccc:c}2&4&6&18\\0&-3&-6&-12\\2&7&12&40\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{\text{دویم پړاو}}\left(\begin{array}{ccc:c}2&4&6&18\\0&-3&-6&-12\\0&3&6&22\end{array}\right)\xrightarrow[R_2+R_3\to R_3]{\text{دریم پړاو}}\left(\begin{array}{ccc:c}2&4&6&18\\0&-3&-6&-12\\0&0&0&10\end{array}\right)$$

لیدل کېږي چې په لاس راغلی متریکس کې د x_2, x_1 او x_3 ضریبونه په دریم سطر کې صفر دی، په داسې حال کې چې په یاد شوي سطر کې ثابت عدد 10 دی او دا غیر ممکن دی چې($x_1=x_2=x_3=0=10$) نو سیستم حل نه لري.

فعالیت

د لاندې معادلو سیستم حل او میزان کړئ.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

پاملرنه: که چیرې د خطي معادلو په سیستم کې یو له مجهولینو څخه موجود نه وي، د هغه ضریب صفر په پام کې نیسو، وروسته د خطي معادلو د ضریبونو او د ثابتو مقدارونو مټریکس تشکیلوو:

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ.

$a)\ \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ $\quad b)\ \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases}$ $\quad c)\ \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ -3y = -6 \end{cases}$

د شپږم څپرکي مهم ټکي

د مټریکس تعریف: یوه ګېډۍ عددونه یا توري چې په سطري او ستوني ډول په یوه مستطیلي جدول کې ځای پر ځای شوې وي. د مټریکس(Matrix) په نامه یادېږي.

د مټریکسونو ډولونه:

- **سطري مټریکس**: هغه مټریکس چې یوازې یو سطر ولري.
- **ستوني مټریکس**: هغه مټریکس چې یوازې یو ستون ولري.
- **صفري مټریکس**: هغه مټریکس چې ټول عناصر یې صفرونه وي.
- **مربعي مټریکس**: هغه مټریکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر یې سره برابر وي.
- **مساوي مټریکسونه**: دوه مټریکوسونه، هغه وخت سره مساوي دي چې ټول عناصر یې یو په یو سره برابر او مساوي وی.
- قطري مټریکس هغه مټریکس چې ټول عناصر یې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، قطر ي مټریکس بلل کېږي.
- **سکالر مټریکس**: هر قطري مټریکس چې د اصلي قطر عناصر یې سره برابر وي، سکالري مټریکس بلل کېږي.
- **واحد مټریکس**: په هر سکالري مټریکس کې که د اصلي قطر عناصر د 1 عدد وي، واحد مټریکس بلل کېږي.

په مټریکسونو باندې لومړني عملیات:

- **د مټریکسونو جمع او تفریق**: د مټریکسونو جمع او تفریق هغه وخت امکان لري چې:

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} \pm (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

د مټریکسونو د جمعې او تفریق خواص:

1) $A+B=B+A$
2) $A-B \neq B-A$
3) $(A\pm B)\pm C = A\pm(B\pm C)$
4) $A+0=0+A=A$
5) $A+(-A)=-A+A=0$

په مټریکس کې د سکالر ضربول: که $K \in IR$ او $A=(a_{ij})_{m\times n}$ وي، نو:

$$KA = K(a_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

په مټریکس کې د سکالر ضرب خواص:

a) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

b) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

c) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

د دوو مټریکسونو ضرب: د دوو مټریکسونو ضرب هغه وخت ممکن دی چې د لومړي مټریکس د ستونونو شمېر، د دویم مټریکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي، که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ وي، نو:

$$A\cdot B = (a_{ij})_{m\times n} \cdot = (b_{ij})_{n\times p} = (C_{ij})_{m\times p} = C_{m\times p}$$

يعنې د دوو مټريکسونو د ضرب حاصل هغه دريم مټريکس دی چې د سطرونو شمېر يې له لومړي مټريکس سره او د ستونونو شمېر يې له دويم مټريکس سره برابر وي.

د مټريکسونو د ضرب خواص: که A او B دوه مټريکسونه وي، نو:

1) $AB \neq BA$
2) $(AB)C = A(BC)$
3) $A(B+C) = AB + AC$
4) $I \cdot A = A \cdot I = A$
5) $K(AB) = (KA)B = A(KB)$

د يوه مټريکس ترانسپوز مټريکس: که د يوه $A_{m\times n}$ مټريکس ستونونه په سطرونو او سطرونه په ستونونو بدل شي، هغه نوی مټريکس چې لاسته راځي ،د ترانسپوز مټريکس په نامه يادېږي. د A ترانسپوز مټريکس په A^T سره ښيي.

مثلثي مټريکس: که په يوه مټريکس کې د اصلي قطر پورتني او يا ښکتني عناصر ټول صفرونه وي، نوموړی مټريکس د مثلثي مټريکس په نامه يادېږي.

متناظر مټريکس: که د A يو مټريکس له خپل ترانسپوز A^T مټريکس سره برابر شي($A = A^T$) نو د A مټريکس ته متناظر مټريکس وايي.

ديترمېنانت: که د A مټريکس يوه حقيقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مټريکس له ديترمېنانت څخه عبارت دی، او د $|A|$ يا $\det A$ په شکل سره ښودل کېږي.

د ديترمېنانت خواص:

1. که د $A_{n\times n}$ مټريکس د يوه سطر او يا ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو ديترمېنانت يې صفر دی، يعنې:
$\det A = |A| = 0$
2. که د ديترمېنانت دوه سطرونه او يا دوه ستونونه سره برابر(مساوي) وي، نو ديترمېنانت يې صفر دی. $|A| = 0$
3. که $A_{n\times n}$ مټريکس د يوه سطر يا ستون عناصر د بل سطر يا ستون د عناصرو مضرب وي، نو ديترمېنانت يې صفر دی. $|A| = 0$
4. د A مټريکس او د A ترانسپوز مټريکس ديترمېنانتونه سره مساوي وي، يعنې: $|A^T| = |A|$

د مټريکسونو ضربي معکوس: د $A = (a_{ij})_{m\times n}$ مربعي مټريکس په پام کې نيسو ،که چيرې د B مربعي مټريکس داسې موجود وي چې $AB = BA = I$ ، په دې صورت کې د B مټريکس د A د مټريکس معکوس دی او د A د مټريکس معکوس مټريکس په A^{-1} سره ښيي: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

د خطي معادلو د سيستم حل:

- له معکوس مټريکس څخه په ګټه اخيستنې د خطي معادلو د سيستم حل.
- د خطي معادلو د سيستم حل د کرامر په طريقه.
- دګوس په طريقه د خطي معادلو د سيستم حل.

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کړی تاو کړئ.

1. که $|A|=3$ وي، نو $|A^{-1}|$ پیدا کړئ.

$a)\ \frac{1}{3}$ $b)\ 9$ $c)\ \frac{1}{9}$ $d)\ 3$

2. که $A=\begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ معکوس منونکی مېټريکس وي، نو د m قیمت به څو وي؟

$a)\ m=1,\frac{1}{2}$ $b)\ m\neq 1$ $c)\ m=0$ $d)\ m\neq 1,\frac{1}{2}$

3. که $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ وي، د x هغه مېټريکس په لاس راوړئ چې په دغه رابطه $Ax=A^{-1}$ کې صدق وکړي.

$a)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ $b)\ \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$ $d)\ \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4. د $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ مېټريکس لاندې د $y=2x$ د خط بدلون منونکي خط پیدا کړئ.

a) د y محور   b) د x محور   c) $y+2x=0$ d) $y=0$

5. د x په کومو قیمتونو دغه دیترمینانت $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ صفر دی؟

6. $a)\ x=1,2$ $b)\ x=3,1$ $c)\ x=\frac{1}{2},3$ $d)\ x=3,2$

7. د $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ دیترمینانت حاصل په لاس راوړئ.

$a)\ 29$ $b)\ 39$ $c)\ 19$ $d)\ 9$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 4\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}$ وي، لاندې محاسبې غوښتل شوې دي:

$a)\ 3A-2B$ $\qquad$ $b)\ -4A+3B$

2. فرض کړئ که $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\-1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 3\\2 & -1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو AB او BA محاسبه کړئ

او ووایاست چې $AB = BA$ دی.

3. لاندې مېټریکسونه په پام کې ونیسي:

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\0 & -1\end{pmatrix}\ ,\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\-2 & 2\end{pmatrix}\ ,\quad A=\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}$$

اشتراکي خاصیت، توزیعي خاصیت او د مېټریکسونو ضرب د درو مېټریکسونو لپاره وښایاست.

4. لاندې دیترمېنانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\1 & 0 & 2\\2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

5. د لاندې مېټریکس معکوس مېټریکس د الحاق(ad joint) په طریقه پیدا کړئ.

$$M=\begin{pmatrix}2 & -5\\3 & -9\end{pmatrix}$$

6. د لاندې خطي معادلو سیسټمونه د کرامر په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}2x+y+z=6\\x-2y+2z=10\\3x-y-z=4\end{cases}\qquad b)\ \begin{cases}x_1-2x_2=4\\2x_1+4x_2=5\end{cases}$$

7. د لاندې خطي معادلو سیسټمونه د ګوس په طریقه حل کړئ.

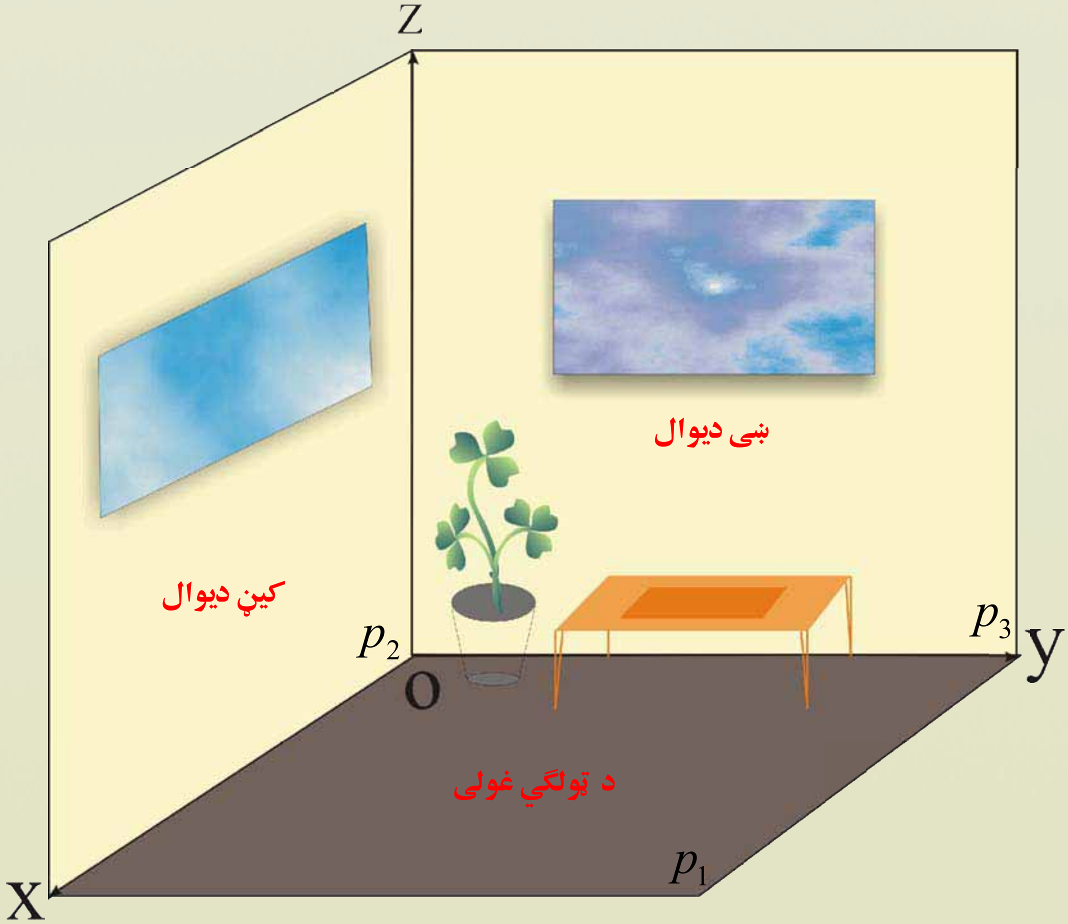
$$a)\ \begin{cases}2x-3y+3z=0\\3x+2y-5z=0\\5x-4y-2z=0\end{cases}\qquad b)\ \begin{cases}2x+3y-7=1\\2y+27=-2\end{cases}$$

8. د لاندې خطي معادلو سیسټمونه د معکوس مېټریکس په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}3x+y+1=0\\4x+3y-2=0\end{cases}\qquad b)\ \begin{cases}x-y=2\\x+2y=-1\end{cases}$$

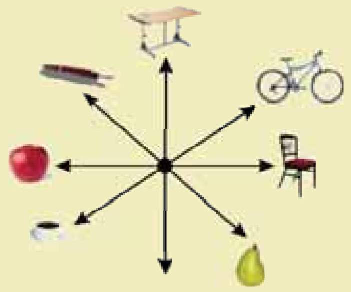
اووم څپرکی

وکتورونه


Z
ښی دیوال
کیڼ دیوال
p_2
o
p_3
y
د ټولګي غولی
p_1
x

د وضیعه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه

له یوه ټاکلي ټکي څخه د هغې شاوخوا بېلابېلو پرتو شیانو ته لنډې لارې په نښه کړئ.



تعریف

جهت لرونکي قطعه خط ته وکتور وايي، یا په بل عبارت هغه کمیت چې هم مقدار لري او هم جهت لري؛ لکه قوه، فاصله، تعجیل او داسې نور. هر غشی د یو وکتور ممثل دی.

هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پروت وي، د شعاع وکتور (Position Vector) په نامه یادیږي.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې شعاع وکتور داسې رسم کړئ چې د پای ټکی یې د B (5,5) مختصات ولري.
- د پورتنی راکړل شوي وکتور درې ممثل وکتورونه په راکړل شوو قایمو مخصاتو کې داسې رسم کړئ چې وکتور او شعاع وکتورونه یې توپیر سره ولري.
- یو بل وکتور رسم کړئ چې له پورتني وکتور سره مساوي او مخالف لوري او شعاع وکتور وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله ترلاسه کېږي.

پایله: په یوه مستوي او په فضا کې هر ممثل وکتور د خپل شعاع وکتور په اندازه وي، نولرو چې:

1. د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه هغه وخت مساوي بلل کېږي، چې اوږدوالی یې مساوي، $(|\vec{a}|=|\vec{b}|)$ موازي او د یو جهت لرونکی وي.

2. که چېرې یو وکتور $\vec{AB}=0$ وي، په دې صورت کې د $\vec{AB}$ وکتور صفري وکتور (Zero Vector) بلل کیږي.

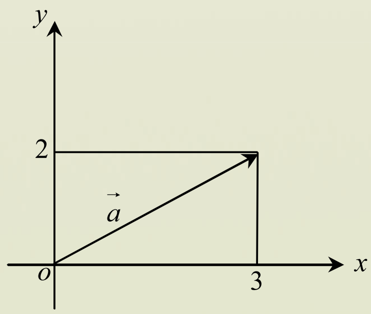
3. دوه وکتورونه هغه وخت مخالف یا منفي بلل کیږي چې اوږدوالی یې مساوي او جهت یې مخالف وي، د بیلګې په توګه:

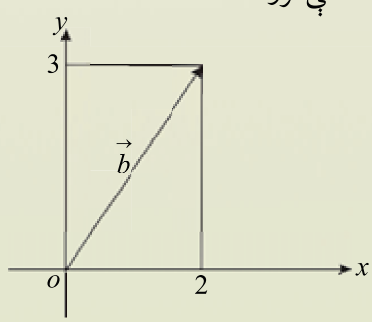
که $\vec{OA}=\vec{a}$ وي، نو $\vec{AO}=-\vec{a}$ دی، په داسې حال کې چې $(|\vec{OA}|=|\vec{AO}|)$ وي.

تعریف: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې یو وکتور په ستوني شکل داسې ښوول کېږي $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ په داسې حال کې چې a_x د x پرمحور وضعیه کمیت او a_y د y پرمحور د $\vec{a}$ وکتور فاصله او ترتیب ښیې.

لومړی مثال: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ او $\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ وکتورونه وښایاست؟

حل: د پورتني تعریف له مخې لرو:





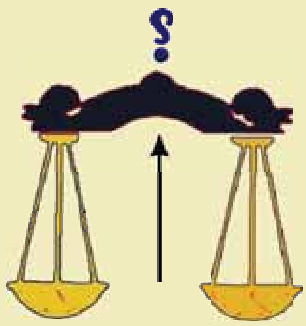
یادونه: د یو وکتور د ښوولو لپاره یوه مستوي په دې خاطر کارول کېږي، چې د قایم مختصاتو په سیستم کې د یو ټکي د ښودلو لپاره د مختصاتو په سیستم کې یوازې یو ځای شته، په داسې حال کې چې په مستوي کې د یو وکتور د ښودلو لپاره چې هماغه وکتور په مستوي کې ځای نیولی شي، بې نهایت ځایونه شته.

پوښتني

1. د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:
   a. د هر یوه وکتور درې ممثل وکتورونه رسم کړئ.
   b. دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.
   c. د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی

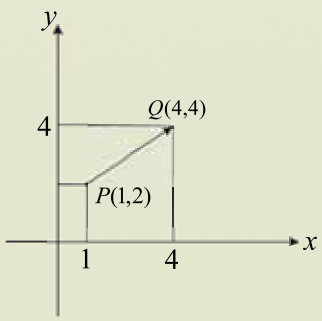
د تلې دوه یو شان او هم وزنه پلې په پام کې نیسو، چې د یو شاهین په دواړو خواوو کې تړل شوي دي. د تلې د شاهین په لاس کې نیولو لپاره کوم ټکی وټاکو چې په نیولو یې د تلې پلې تعادل غوره کړي؟



فعالیت

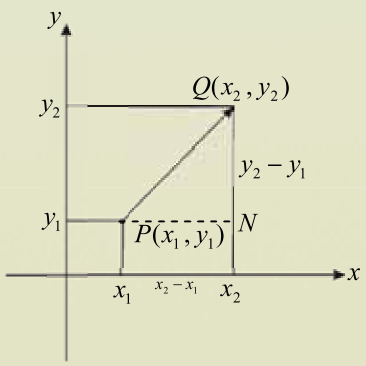
د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د لاندې شکل په څیر $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ ټکې په پام کې ونیسئ:

- د $\vec{PQ}$ د وکتور اوږدوالی څومره دی؟
- آیا د $\vec{PQ}$ د وکتور د اوږدوالي یا د P او Q دوو ټکو ترمنځ د واټن لپاره فارمول ورکولای شئ؟
- د $\vec{PQ}$ د منځني ټکي وضعیه کمیتونه څومره دي؟
- آیا کولای شئ د دوو ټکو د واټن او د هغوی د منځني ټکي
- لپاره د فورمول په واسطه یو عمومي حالت څرګند کړئ؟



د پورتني فعالیت له پای څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

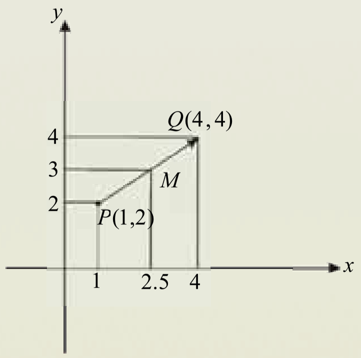
پایله: د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور د هرو دوو اختیاري ټکو لپاره چې $P(x_1,y_1)$ مبداء او $Q(x_2,y_2)$ انجام دی په دې صورت کې وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ سره ښیو، د $\overset{\Delta}{PQN}$ قایم الزاویه مثلث په پام کې نیولو سره د $|\vec{a}|$ د وکتور اوږدوالی عبارت دی، له: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$



- د $\vec{PQ}$ منځنی ټکی عبارت دی، له:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}\\\frac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$$

لومړی مثال: د $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ؟



حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+4}{2}\\\frac{2+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{6}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$$

نو د منځني ټکي وضعیه کمیت له $M=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$ څخه عبارت دی او د P او Q د دوو ټکو د واټن د پیداکولو لپاره د فیثاغورث د قضیې په پام کې نیولو سره لرو:

$$|\vec{PQ}|=\sqrt{a_x^{\,2}+a_x^{\,2}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

دویم مثال: د $A(2,4)$ او $B(5,5)$ د ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ.

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2+5}{2}\\\frac{5+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.5\\4.5\end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

پوښتنې

د لاندې درکړ شوو ټکو ترمنځ واټن او منځني ټکي پیدا کړئ.

$i)\;\; B(2,7) \quad , \quad A(3,4)$

$ii)\;\; N(5,1) \quad , \quad M(1,5)$

$iii)\;\; Q(8,8) \quad , \quad P(1,8)$

وکتورونه په سطح او فضا کې

د تلسکوپ پـه واسـطه د سـتورو د تګلـوري لیـدل پـه فضا کې ځانګړې وکتورونه ښیي.

د یـوې سـطحې پـرمخ د وکتورونـو لپـاره یـوه بېلګـه راوړلای شئ؟

فعالیت

د لاندې شکل له مخې د وضعیه کمیاتو د قایم سیستم او د $IR^2=\{(x,y)\ /\ x,y\in IR\}$ سټ په پام کې نیولو سره لاندې فعالیت سرته ورسوئ.

- د وضعیه کیماتو په سیستم کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دی، په مستوي کې وټاکئ.
- د $\vec{u}$ یو شعاع وکتور چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ دي، د وضعیه کمیتونو په سیستم کې وښیئ.
- په مستوي کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دي، په مستوي کـې لـه $\vec{u}$ یـو وکتـور سـره څه توپیر لري چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ وي؟
- د $\vec{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ دوه اختیاري وکتورونه او $a\in IR$ یو سکالر لپاره په هندسـي توګـه د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې په جلا جلا ډول وښیئ، چې:

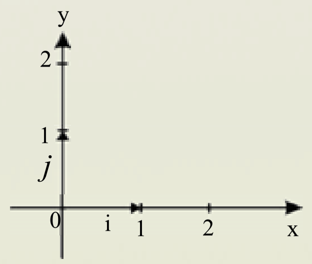
i) $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ (د جمعي قاعده)

ii) $a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$ (دسکالري ضرب قاعده)

تعریف: د هغو ټولو مرتبو جوړو سټ چې د پورته قاعدې په څېر د جمعې او سکالري ضرب قاعدې پـرې تطبیق وي، د IR^2 (مستوي) د وکتورونو فضا او یا په مستوي کې د وکتور په نامه یادېږي.

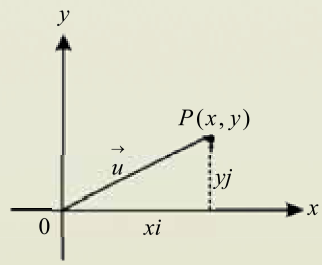
له پورتني فعالیت او تعریف څخه لاندې پایله لاسته راځي:

پایله: د دوو ځانګړو وکتورونو $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په پام کې نېولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او $|\vec{i}|=|\vec{j}|$ دي. $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ هر اختیاري وکتور لپاره لرو:



$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$



$\vec{i}$ او $\vec{j}$ واحد وکتورونه دي چې د x او y محورونو په امتداد پراته دي.

واحد وکتور(unit victor): هغه وکتور دی چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزاید لپاره ترې کار اخلي.

لومړی مثال: که $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ وي، د لاندې وکتورونو قیمت پیدا کړئ.

(i): $\vec{u}+\vec{v}=?$ (ii): $4\vec{u}+2\vec{v}=?$ (iii): $\vec{u}-\vec{v}=?$

(iv): $\vec{u}-\vec{u}=?$ (v): $|\vec{u}|=?$

حل:

$i)\quad \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}$

$ii)\quad 4\vec{u}+2\vec{v}=4\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+4\\-12+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}=8\vec{i}-2\vec{j}$

$iii)\quad \vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\\-3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}=-\vec{i}-8\vec{j}$

$iv)\quad \vec{u}-\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$

$v)\quad |\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

پوښتنه

1. که $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ وي، $\vec{u}+2\vec{v}$، $\vec{u}-2\vec{v}$ او $2\vec{u}+4\vec{v}$ پیدا کړئ.

په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

که د ټولګي په فضا کې يو ټکی وټاکئ آيا داسې يوه د حل لاره شته چې د ټکي واټن نسبت د ټولګي غولي او مجاور ديوال ته وټاکو؟

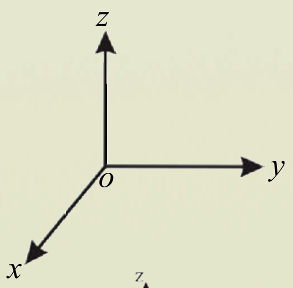
تعريف

درې بُعدي IR^3 فضا د ټولو هغو مرتبو درې ګونو (x, y, z) څخه عبارت دی چې په لاندې ډول تعريفيږي:

$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x, y, z) / x, y, z \in IR\}$$

هغه درې مستويګانې p_3, p_2, p_1 چې دوه په دوه يو په بل عمود دي، د درې بُعدي فضا د مختصاتو مستويګانې بلل کيږي.

د دغو مستويګانو د دوه په دوه ګډ فصل درې قايمې زاويې جوړوي چې هغه د درې بُعدي فضا قايم مختصات بولي. د درې بعدي فضا قايم مختصات داسې نوموي چې که يو تن ودريږي، هغه محور چې د ليدونکي د تنې په لور دی، د z محور او هغه محور چې د ليدونکی د ليد په لور دی د y محور او هغه محور چې د ليدونکو د ښي لاس په لور پروت دی، د x محور دی او د دغو درې وارو محورونو د تقاطع ټکی له O ټکي څخه عبارت دی . چې د قايمو مختصاتو مبداء ښيي.

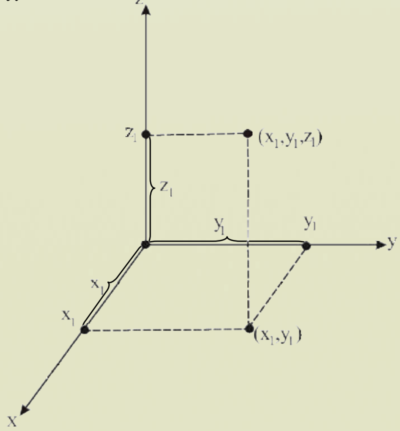


په درې بعدي فضا کې د يوه ټکي مختصات له هغه واټن څخه عبارت دی چې له درې وارو مستويګانو څخه يې لري.

د ټکي واټن د مختصاتو له مستويګانو څخه په $|x|$، $|y|$ او $|z|$ سره ښيي.

په درې بعدي فضا کې د يوه ټکي د ځای ټاکل:

د درې بعدي فضا په قايمو مختصاتو کې د $A(x_1, y_1, z_1)$ ټکي د ټاکلو لپاره د هرې مختصې په اړوند محور بانـدې د مختـصې د علامې په پام کې نيولو سره فاصلې جلا کوو، لومړی د x لـه محور څخه موازي خط د y لـه محـور سره رسمـوو، د تقاطع ټکی يې چې (x, y) دی، پيدا او وروسته له ياد شوي ټکي څخه يو بل خط موازي د z له محور سره رسموو، په پايله کې د تقاطع ټکی په لاس راځي چې په دې ترتيب د ټکي ټاکل په درې بعـدي فضا کې بشپړيږي.



یادونه: په درې بعدي فضا کې د y, x او z مختصو منفي جهتونه د نومو‌ړو محورونو له امتداد یافته څخه عبارت دي.

فعالیت

- د $A(2,4,3)$ او $B(-2,-3,3)$ ټکي د درې بعدي فضا قایم سیستم کې وښایاست.

په فضا کې د $P(x,y,z)$ یو ټکی چې د $\vec{OP}$ وکتور له $\vec{u}$ سره مساوي دی، د IR^2 د فضا په شان په درې بعدي په فضا یا IR^3 کې هم د جمعې او سکالري ضرب قاعدې د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دواړو وکتورونو لپاره او د a سکالر لپاره صورت نیسي:

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$$ (د جمعې قاعده)

$$a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\\az\end{pmatrix}$$ (د سکالري ضرب قاعده)

لومړی مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$ وي، $\vec{v}+\vec{w}$ ، $\vec{v}-\vec{w}$ ، $2\vec{w}$ او $\left|\vec{v}-2\vec{w}\right|$ پیدا کړئ.

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\1+4\\3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$ii)\quad \vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1-4\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$iii)\quad 2\vec{w}=2\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$iv)\quad \left|\vec{v}-2\vec{w}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2+2\\1-8\\3-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+(-7)^2+3^2}$$

$$=\sqrt{16+49+9}=\sqrt{74}$$

یادونه:

A- کیدای شي سطحې ته ورته درې واحد وکتورونه $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ چې:

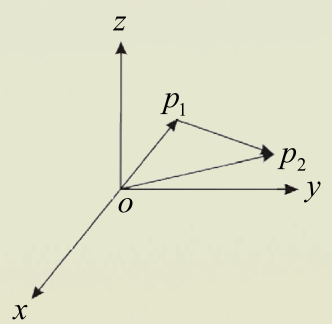
$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ دي، په درې بعدي فضاکې په پام کې نیول شوی، د z, y, x محورونو په امتداد د واحد

د وکتورونو په نامه یاد کړو. د جمعې د قاعدې په پام کې نیولو سره د $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ هر اختیاري وکتور د واحد

وکتور په پام کې نیولو سره په لاندې توګه ښودلی شو:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

B- **په فضا کې د دوو ټکو ترمنځ واټن:** که چېرې $\vec{OP_1}$ او $\vec{OP_2}$ د $P_1(x_1, y_1, z_1)$ او $P_2(x_2, y_2, z_2)$ د ټکو دوه شعاع وکتورونه وي، په دې توګه لرو:



$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p_1p_2}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$

نو د P_1 او P_2 د ټکو ترمنځ د واټن د پیداکولو لپاره لرو:

$$\left|\vec{P_1P_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

پورتنی فورمول د P_1 او P_2 ټکو ترمنځ واټن ښیي.

C- که په درې بُعدې فضاکې د یو ټکي واټن له مبدأ څخه مطلوب وي یعنې $(x_1, y_1, z_1)=(0,0,0)$ او $(x_2, y_2, z_2)=(x, y, z)$ وي؛ نو د ټکي واټن له مبدأ څخه د لاندې فورمول په واسطه پیداکولای شو:

$$\left|\overrightarrow{p_1p_2}\right|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

دویم مثال: که $\vec{a} = (-5\ ,\ 4\ ,\ 5)$ وی؛ نو د نومورړي شعاع وکتور طول څو دی؟

حل: د شعاع وکتور موقعیت ته په کتنې څرنګه چې د شعاع وکتور مبدأ د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې پرته ده د C جز له فورمول څخه ګټه اخلو:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + + y^2 + z^2} = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{25+16+25} = \sqrt{66}$$

دریم مثال: که $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ ، $\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ او $\vec{w} = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}$ راکړل شوی وي.

ومومئ $ii)\ \left|\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}\right| = ?$ $\qquad i)\ \vec{u} + 2\vec{v} = ?$

حل: لرو چې:

$$i)\ \vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} + 2(4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$= 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} + 8\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k} = (10\vec{i} + 15\vec{j} + 5\vec{k})$$

$$ii)\ \left|(2-4-6)\vec{i} + (3-6-9)\vec{j} + (1-2+3)\vec{k}\right| = \left|-8\vec{i} - 12\vec{j} + 2\vec{k}\right|$$

$$= \sqrt{(-8)^2 + (-12)^2 + 2^2} = \sqrt{64+144+4}$$

$$= \sqrt{212}$$

پوښتنې

1. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو جهت ته واحد وکتور پیدا کړئ.

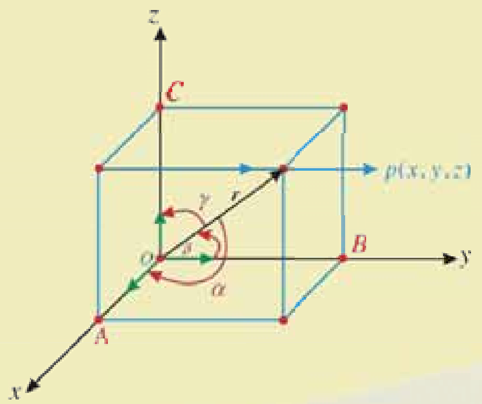
2. په دریم مثال کې چې $\vec{u}, \vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونه راکړل شوي دي په پام کې ونیسئ او لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

$a)\ 2\vec{u} - 6\vec{v} + 4\vec{w} = ?$ $\qquad b)\ |\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - 2\vec{w}| = ?$

3. $\vec{u}$ او $\vec{v}, \vec{v}$ او $\vec{w}, \vec{w}$ او $\vec{u}$ وکتورونو ترمنځ واټن پیدا کړئ.

4. هغه وکتور واحدونه پیدا کړئ چې د $\vec{u}, \vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونو په جهت پراته دي؟

د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه



تعریف: که د $\vec{r}$ شعاع وکتور د قایمو مختصاتو له محورونو سره په ترتیب د β , α او γ زاویې جوړې کړي په دې صورت کې شکل ته په پام لیکلای شو:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$$
$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_x$$
$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_y$$
$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_z$$

کولای شو د $\vec{r}$ د وکتور د جهت کوساینونه په لاندې ډول ولیکو:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\alpha$$
$$\cos\beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cos\beta$$
$$\cos\gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\gamma$$

د پورتنیو اړیکو چپ لوری مربع کوو او وروسته یې سره جمع کوو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}$$

پوهېږو چې $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ دی، نو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

فعالیت

که چېرې په یوه درې بعدي فضا کې $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ وکتور چې د صفر خلاف دی، ورکړ شوی وي، داسې چې د پورته شکل په شان α , β او γ په ترتیب سره د $\vec{v}$ وکتور زاویې او $\vec{i} , \vec{j} , \vec{k}$ واحد وکتورونه وي، په دې ډول لاندې فعالیت اجرا کړئ.

- آیا ویلاي شئ چې د α , β او γ زاویې په کومه اندازه تحول کوي؟
- آیا له پورتنیو زاویو څخه یوه یې منفي کیدای شي؟
- که چیرې له زاویو څخه یوه یې صفر شي، د وکتور د موقعیت په هکله څه ویلای شئ؟
- د $\vec{v}$ د وکتور جهت زاویو کوساین لپاره یوه ګډه اړیکه پیدا کړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسیږو:

پایله: که په فضا کې د $\vec{v}$ یو وکتور، چې صفر نه وي، یعني $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$، راکړل شوی وي، نو د جهت د زاویو د کوساینونو ترمنځ لاندې اړیکې شته:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

د پورتنۍ پایلې د ثبوت لپاره پوهیږو، چې:

$$\left|\vec{v}\right| = \left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right| = \left|x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

له بلې خوا د جهت د واحد وکتور یا د $\vec{v} = \vec{OP}$ مسیر عبارت دی، له:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{v}_x}{|\vec{v}|} \\ \dfrac{\vec{v}_y}{|\vec{v}|} \\ \dfrac{\vec{v}_z}{|\vec{v}|} \end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. که $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$، $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ او $\vec{w} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ وي، پیدا کړئ؟

$a)\ \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = ?$ $\qquad b)\ \vec{v} - 3\vec{w} = ?$ $\qquad c)\ \left|3\vec{v} + \vec{w}\right| = ?$

2. د α اندازه داسې پیدا کړئ چې د $\alpha\,\vec{i} + (\alpha+1)\,\vec{j} + 2\vec{k}$ وکتور اوږدوالی مساوي په 3 وي.

د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

د دوو وکتورونو د سکالر ضرب حاصل د انجینرۍ او فزیک په زده کړه کې په کاريږي او د هغو ترمنځ زاويې په پام کې نيولو سره له يو سکالري کميت سره مساوي دی، که چيرې: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ وي، نو $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ده، که نه؟

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

تعريف

$\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي يا فضا کې په پام کې نيسو.

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ سکالري ضرب حاصل په $\vec{u}\cdot\vec{v}$ سره ښيو، چې حاصل يې عبارت دی، له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاويه جوړه کړې او $(0\leq\theta\leq\pi)$ سره دي.

فعاليت

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل په پام کې نيولو سره وښاياست، چې:

i) $\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1$

ii) $\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{i}=0$

iii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

iv) که $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د صفر خلاف او $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ وي، نو وکتورونه يو پر بل عمود دي.

- د دوه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ وکتورونو لپاره د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ضرب حاصل د $a_1a_2+b_1b_2$ له سکالري قيمت سره مساوي دی.
- په فضا کې د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ د ضرب حاصل مطلوب يا غوښتل شوی په دې ډول چې $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وي.

د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل لپاره له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله لاسته راځي.

پايله: که $\vec{u}$، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ درې اختياري وکتورونه او c يو حقيقي عدد وي، نو لرو:

i) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

ii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (د ضرب تبادلوي خاصیت یا خانگړتیا).

iii) $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,\vec{v}+\vec{u}\,\vec{w}$ (د ضرب توزیعي خاصیت په جمع).

iv) $(c\cdot\vec{u})\,\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})$ در ضرب توزیعي خاصیت.

لومړی مثال: که $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ دوه وکتورونه د صفر خلاف وي، د سکالري ضرب حاصل يې پیدا کړئ.

حل: د تعریف له مخې لرو چې:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$

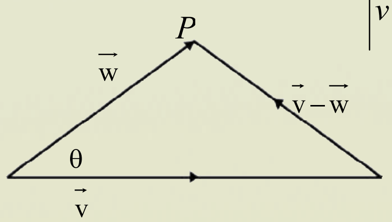
$$=a_1\cdot a_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_1b_2\cdot(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\cdot\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\cdot\vec{k})$$

$$+c_1\cdot a_2(\vec{k}\cdot\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\cdot\vec{k})=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

دویم مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ د یو ې مستوي دوه وکتورونه وي، وښایاست چې:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=x_1x_2+y_1y_2$$

حل: د تعریف له مخې لرو: $\left|\vec{v}-\vec{w}\right|^2=\left|\vec{v}\right|^2+\left|\vec{w}\right|^2-2\vec{v}\cdot\vec{w}\cdot\cos\theta$



څرنګه چې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ ، $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ په پایله کې $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}$ دي، نو د پورتنۍ اړیکې څخه لرو:

$$|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2=|x_1^2+y_1^2|+|x_2^2+y_2^2|-2\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2x_1x_2-2y_1y_2=-2\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|\cos\theta \,/\div -2$$

$$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=\left|\vec{w}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cos\theta=\vec{v}\cdot\vec{w}$$

دريم مثال: كه چېرې د $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ او $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ وكتورونه دركړ شوي وي، د سكالري ضرب حاصل يې پيدا كړئ.

حل: د فورمول په پام كې نيولو سره لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=i^2+4j^2+k^2=1+4+1=6$$

څلورم مثال: وښاياست چې د $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ وكتورونه يو پر بل عمود دي.

حل: په دې هكله لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})(4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})=(2)(4)+(-4)(-3)+(5)(-4)$$
$$=8+12-20=0 \quad\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

ځرنگه چې د وكتورونو د سكالري ضرب حاصل مساوي په صفر شو، نو وكتورونه يو پر بل عمود دي.

پنځم مثال: د α قيمت داسې پيدا كړئ چې د $2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k}$ او $3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k}$ وكتورونه يو پر بل عمود وي.

حل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وكتورونو له عمود والي څخه دې پايلې ته رسېږو چې: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ دی، نو لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k})\,(3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k})=0 \quad\Rightarrow\quad 6+\alpha+5\alpha=0\ ,\ \alpha=-1$$

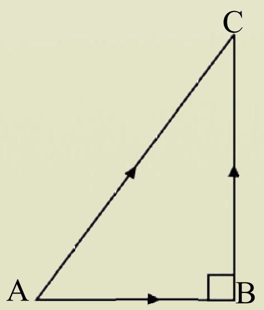
شپږم مثال: وښاياست چې د $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ او $3i-4j-4k$ وكتورونه د يو قايم الزاويه مثلث ضلعې دی.

حل: كه $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ او $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ د مطلوب مثلث دوه ضلعې په پام كې ونيسو، نو دريمه ضلع يې د مثلث د وكتورونو د جمعې حاصل په پام كې نيولو سره چې د مثلث دريمه ضلع تاكې عبارت دی له:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

(چې د مثلث له دريمې ضلعې څخه عبارت دی) $3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ اوس ښيو چې نوموړی مثلث قايم الزاويه دی، د دې لپاره د وكتوري ضرب حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ وي.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\,(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$
$$=(2)(1)+(-1)(-3)+(1)(-5)=2+3-5=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$$



پوښتنې

1. وښایاست چې د $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ د وکتور مرتسمونه د $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ واحد کتورونو په امتداد په ترتیب سره له c,b,a سره مساوي دي.

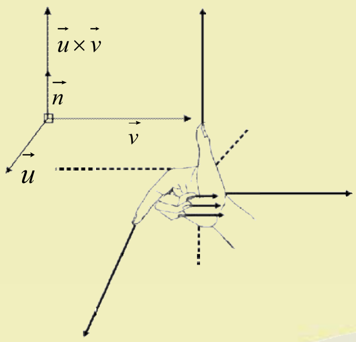
2. وښایاست چې هر $\overset{\Delta}{ABC}$ کې لاندې اړیکې وجود لري:

$i)\ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A \qquad ii)\ a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$

3. ثبوت کړئ چې: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

د وکتوري ضرب حاصل

The cross Product



د راکړل شوي شکل له مخې د کوم لاس (ښي یا کیڼ) په واسطه د $\vec{v}\cdot\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتورونه داسې وښیو چې $\vec{u}$ د ورغوي په جهت، $\vec{v}$ د ځنګل په جهت او $\vec{u}\times\vec{v}$ د ښي لاس د غټې ګوتې په لور واقع شي؟

تعریف

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، په پام کې نیسو. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل په $\vec{u}\times\vec{v}$ چې($\vec{u}$ کرس $\vec{v}$ لوستل کیږي) عبارت دی، له: یعنې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د دوی د مبدأ په ټکي عمود وي.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\theta)\,\vec{n}$$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ $(0\le\theta\le\pi)$ وکتورنو تر منځ زاویه او $\vec{n}$ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د وکتورونو په واسطه جوړه شوې مستوي له عمود واحد وکتور څخه عبارت دی، د ښي لاس قاعدې په واسطه (Right hand rule) ښودل کیږي.

د دوو وکتورونو وکتوري ضرب

مخکې له دې چې د دوو وکتورنو وکتوري ضرب توضیح کړو، لازمه ده چې د وکتورونو خطي ترکیب، وکتوري فضا، د وکتورونو خطي خپلواکي(استقلال) په لنډ ډول تر څېړنې لاندې ونیسو.

1. **د وکتورونو خطي ترکیب**: د یوه سټ د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغه سټ د وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

که $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ د یوه سټ وکتورونه او $\alpha_1,\alpha_2,\ \dots\ ,\alpha_n\in IR$ سکالرونه وي، په دې صورت کې د $\vec{a}$ وکتور په داسې حال کې چې $\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$ وي، $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

لومړی مثال: که $\vec{a}_1=2i+j-3k$ او $\vec{a}_2=i+2j+2k$ وکتورونه راکړل شوي وي، د هغوی خطي ترکیب په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې $\alpha_1=5$ او $\alpha_2=2$ وي.

حل:

$$\vec{a} = 5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = 5(2i + j - 3k) + 2(i + 2j + 2k)$$
$$= 10i + 5j - 15k + 2i + 4j + 4k$$
$$= 12i + 9j - 11k$$

د $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

دويم مثال: که $\vec{a}_1 = (2,3)$ او $\vec{a}_2 = (5,1)$ وکتورونه راکړل شوي وي، وښایاست چې د $\vec{a} = (6\ ,\ -5)$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو خطي ترکیب دی.

حل: څرنګه چې $\alpha_1\ ,\ \alpha_2 \in IR$ سکالرونه دي، نو:

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,1)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1\ ,3\alpha_1) + (5\alpha_2\ ,\ \alpha_2)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1 + 5\alpha_2\ \ ,3\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 \ \ = -5 \end{cases}$$

له پورتني سیستم څخه د α_1 او α_2 قیمتونه په لاس راوړو:

$$\begin{array}{r} 3\left\{ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \right. \\ 2\left\{ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \right. \\ \hline 6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 18 \\ -6\alpha_1 \pm 2\alpha_2 = \mp 10 \\ \hline \end{array}$$
$$13\alpha_2 = 28 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{28}{13}$$
$$2\alpha_1 + 5\frac{28}{13} = 6$$
$$2\alpha_1 + \frac{140}{13} = 6 \Rightarrow 2\alpha_1 = 6 - \frac{140}{13} = \frac{78-140}{13}$$
$$2\alpha_1 = \frac{-62}{13} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{62}{26} = -\frac{31}{13}$$
$$\vec{a} = (6\ ,\ -5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,\ 1)$$
$$\vec{a} = (6\ ,\ -5) = -\frac{31}{13}(2\ ,\ 3) + \frac{28}{13}(5\ ,\ 1)$$

یعنې که α_1 او α_2 قیمتونه په $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورنوکې ضرب شي، په پایله کې د $\vec{a}$ وکتور په لاس راځي، نو وموليدل چې $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونه د $\vec{a}$ د وکتور خطي ترکیب دی.

د طبعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په واسطه د یوه وکتور ښودل:

که په دوه بعدي، درې بعدي او بلاخره په n بعدي فضاکې شعاع وکتورونه راکړل شوی وي. کولای شو هغه د واحد وکتورونو د ضریبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وښیو.

a) که دوه بعدي فضا وي $(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$

نو: $= x_1(1, 0) + x_2(0, 1)$

که $e_1 = (1, 0)$ او $e_2 = (0, 1)$ وي.

نو: $(x_1, x_2) = e_1x_1 + e_2x_2$

او په بل ډول یې هم لیکلای شو:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$
$$= xe_1 + ye_2 = xi + yj$$

b) که فضا درې بعدي وي، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$$
$$= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$$

څرنګه چې $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ او $e_3 = (0, 0, 1)$ په درې بُعدي فضاکې واحد وکتورونه دي، نو:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$
$$(x, y, z) = xi + yj + zk$$

c) په عمومي حالت کې که فضا n بعدي وي

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, x_n)$$
$$= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

په داسې حال کې چې $e_1, e_2, \ldots, e_n$ طبعي واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو خطي خپلواکي: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه په یوه وکتوري ساحه کې خطي خپلواکي (خطي استقلال) لري، که چیرې دغه خطي ترکیب $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ مساوي په صفر وي او همدارنګه $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ وي.

فعالیت

که $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ وي وښایاست چې S خطي خپلواکي لري.

غیر خپلواک خطي وکتورونه: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه خطاً مربوط(خطي غیر خپلواک) یا خطي انحصار لري، که چیرې یوازې او یوازې $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ وي او کم ترکمه یو له ضریبونو د $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ څخه د صفر خلاف وي.

یادونه:

ددې لپاره چې د وکتورونو یو سټ په لاس راوړو چې خطي خپلواکي ولري، نو لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: د وکتورونو ترکیب په لاس راوړو او له صفر وکتور سره یې مساوي نیسو.

دویم پړاو: د وکتورونو د جمعې عملیه سرته رسوو.

دریم پړاو: د معادلاتو سیستم تشکیلوو.

څلورم پړاو: د معادلاتو سیستم د سکالرونو لپاره حلوو،په هغه صورت کې چې ټول سکالرونه صفر شي نو وایو چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري او که چیرې له ټولو سکالرو څخه کم ترکمه یو سکالر د صفر خلاف وي، نو وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

مثـــــال: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونـــــه پـــــه لانــــدې ډول راکـــــړل شــــوې دي $\vec{a}_1 = (1,2,0)$, $\vec{a}_2 = (0,3,1)$, $\vec{a}_3 = (2,3,1)$ وښایاســت چــې $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ او $\vec{a}_3$ وکتورونــه خطــي خپلواکي لري او که نه؟

حل: د خطي خپلواکو وکتورونو له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې کولای شو، ولیکو:

لومړی پړاو: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1(1,2,0) + \alpha_2(0,3,1) + \alpha_3(2,3,1) = 0$

دویم پړاو:

$$= (\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (0, 3\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3) = (0,0,0)$$
$$= (\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$$

دریم پړاو:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

څلورم پړاو: اوس د معادلاتو سیستم د α_1 ، α_2 او α_3 لپاره حلوو:

$$\alpha_2 = -\alpha_3$$
$$2\alpha_1 + 3(-\alpha_3) + 3\alpha_3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0, \quad \alpha_1 = 0$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$$
$$0 + 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$
$$0 + 3\alpha_2 + 0 = 0 \Rightarrow 3\alpha_2 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = 0$$

خرنگه چې $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ دي، نو نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري.

فعالیت

د تعریـف لـه مخـې د ښـي لاس د قاعـدې پـه واسـطه د $\vec{u}\times\vec{v}$ او $\vec{v}\times\vec{u}$ مسیر او یا جهت په مخامخ شکل کې وښییې.

- وښایاست چې $\vec{i}\times\vec{i}=0$ او $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ دی.
- د پورتنیو خیړنو له مخې د $\vec{j}\times\vec{j}$ ، $\vec{k}\times\vec{k}$ ، $\vec{j}\times\vec{k}$ او $\vec{k}\times\vec{i}$ وکتورونو د ضـربونو حاصـل پـه هکلـه څه ویلای شئ؟
- وښایاست چې: $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{u}=0$ دی.
- **په عمومي ډول ویـلای شـو چې د $\vec{i},\vec{j}$ او $\vec{k}$ وکتورونـو د ضـرب حاصل په دایروي ډول د لومړني او دویم وکتور د ضرب له حاصل څخه دریم وکتور، لکه د ورکړل شوي دایرې په څېر لاس ته راځي.**

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

پایله: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو (چې صفر نـه وي). د وکتـوري ضـرب لـه حاصل څخه او د ښـي لاس د قاعدې په کارولو سره لرو:

i) $\vec{u}\times\vec{u}=0$

ii) $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$

iii) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

iv) $\vec{u}\times(k\vec{v})=(k\vec{u})\times\vec{v}=k\,(\vec{u}\times\vec{v})\ ,\quad k\in IR$

د وکتوري ضرب د حاصل د تعریف له مخې د پورته پایلي ثبوت دې زده‌کوونکو ته پرېښودل شي.

لومړی مثال: کـه چیرې $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وکتورونـه صـفر نـه وي، نو وښایاست چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\,\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\,\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\,\vec{k}$$

حل: د تعریف په کارولو لرو، چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\times(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$
$$=a_1a_2(\vec{i}\times\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\times\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\times\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\times\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\times\vec{k})$$
$$+c_1a_2(\vec{k}\times\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\times\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\times k)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{array}\right\} ,\quad \left.\begin{array}{l}\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\end{array}\right\} ,\quad \left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{i}=0\\ \vec{j}\times\vec{j}=0\\ \vec{k}\times\vec{k}=0\end{array}\right\}$$

$$=a_1b_2\cdot\vec{k}-a_1c_2\cdot\vec{j}-b_1a_2\cdot\vec{k}+b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\,\vec{j}-c_1b_2\cdot\vec{i}$$
$$=(b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\cdot\vec{j}+a_1b_2\cdot\vec{k})-(c_1b_2\cdot\vec{i}+a_1c_2\,\vec{j}+b_1a_2\cdot\vec{k}$$
$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$
$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$
$$\Rightarrow\quad \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_1&b_1&c_1\\ a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

دویم مثال: وښایاست چې د $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ لپاره د $\vec{a}\times\vec{b}$ حاصل له $(-\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k})$ سره مساوي دی.

حل: د لومړي مثال په کارولو سره پوهیږو، چې:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=8(\vec{i}\times\vec{i})+4(\vec{i}\times\vec{j})-2(\vec{i}\times\vec{k})$$
$$+4(\vec{j}\times\vec{i})+2(\vec{j}\times\vec{j})-(\vec{j}\times\vec{k})+4(\vec{k}\times\vec{i})+2(\vec{k}\times\vec{j})-(\vec{k}\times\vec{k})$$
$$=0+4\vec{k}+2\vec{j}-4\vec{k}+0-\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{i}-0=-3\vec{i}+6\vec{j}$$

د مخلوط ضرب حاصل(درې ګوني ضرب) Triple Product

تعریف: د دوو یا څو وکتورونو د ضرب لپاره څو امکانه شته چې هر یو یې په لاندې ډول تر څېړنې لاندې نیسو:

i) د $(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$ دضرب حاصل.

د پورتنيو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو د ضرب حاصل چې په سکالري ډول ضرب شوی، یو سکالر دی. وروسته نوموړی سکالر د $\vec{c}$ په وکتور کې ضرب شوی چې له پایله یې وکتور په لاس راځي دغه وکتور له $\vec{c}$ د وکتور سره هم جهت دی.

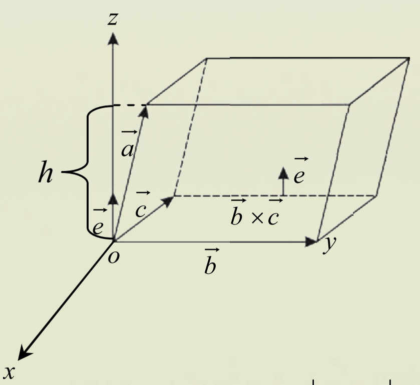
په پورتني ضرب کې لاندې قانون شته: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \neq (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \neq (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$

د $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ وکتور جهت د $\vec{a}$ د وکتور هم جهت او د $(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ وکتور جهت د $\vec{b}$ د وکتور هم جهت دی.

i) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ii) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$

iii) $\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$



iv) د $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ اریکه د هغه متوازي السطوح له حجم څخه عبارت دی چې a, b او c د متوازي‌السطوح اضلاع دي، څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي $|\vec{b}\times\vec{c}|$ د متوازي‌السطوح قاعده او h د متوازي‌السطوح جګوالی دی، نو له دې امله:

$$\text{د متوازي‌السطوح حجم} = v = |\vec{b}\times\vec{c}|(\vec{a}\cdot\vec{e}) = \vec{b}\,|\vec{a}\times\vec{c}|\,\vec{e}$$

$$v = \vec{b}(\vec{a}\times\vec{c}) = |\vec{b}\times\vec{c}|\,h$$

تطبیقاتي مسئلې:

1- که چیرې $\vec{a} = 4\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b} = 2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ وکتورونه راکړل شوي وي، هغه وکتور مطلوب او غوښتل کیږي چې پر دواړو وکتورونو عمود وي، ایا دغه وکتور یوازنی وکتور دی، که څنګه؟ دلیل مو څه دی؟

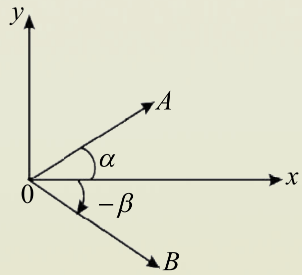
حل: د ښې لاس د قاعدې په کارولو پوهیږو چې د $\vec{a}\times\vec{b}$ وکتور پر هغو وکتورونو عمود دی، نو لرو:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$$

نو د $\vec{a}\times\vec{b}=7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$ وکتور پر $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونه یوازیني عمود وکتورونه دي، بلکې $\vec{b}\times\vec{a}$ وکتور هم د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په وکتورونو عمود دي، یعنې لرو:

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k}=-(7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k})=-\vec{a}\times\vec{b}$$

2- ثبوت کړئ چې د α او β د هرې اختیاري زاویې لپاره $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin B$.



حل: که $\vec{OA}$ او $\vec{OB}$ دوه وکتورونه د x, y په مستوي کې داسې راکړل شوي دي چې د x له محور سره د α او β زاویې جوړې کړي، له شکل ځخه پوهیږو: $A\hat{O}B=\alpha+\beta$

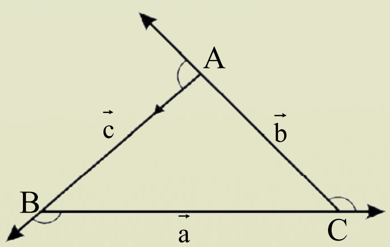
له بلې خوا پوهیږو چې $\vec{OA}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}$ او $\vec{OB}=\cos(-\beta)\,\vec{i}+\sin(-\beta)\,\vec{j}$ نو لرو:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j})\times(\cos\beta\,\vec{i}-\sin\beta\,\vec{j})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ \cos\beta & -\sin\beta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\vec{k}(-\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta)=-\vec{k}\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\ \left|\vec{OA}\right|\times\left|\vec{OB}\right|=\left|-\vec{k}\right|\cdot\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$$

3- په یوه کیفي مثلث کې وښیئ، چې: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$



حل: فرضوو چې د لاندې شکل له مخې د $\vec{a}$، $\vec{b}$ او $\vec{c}$ وکتورونه د $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ او $\overline{AB}$ د مثلث د ضلعو په امتداد راکړل شوي دي، نو لرو: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

$$\Rightarrow\ \vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}\qquad ....\ (i)$$

که د مساوات دواړه خواوې په $\vec{c}$ وکتورکې وکتوري ضرب کړو، لاسته راځي، چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c} = -\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{c}) = -\vec{a}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$$

$$\vec{c}\times\vec{c}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a} \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{b}\times\vec{c}\right| = \left|\vec{c}\times\vec{a}\right|$$

دپورتینو مساواتو د تعریف له مخې داسې لیکلای شو:

$$|\vec{b}|\ |\vec{c}|\sin A = |\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \sin B$$

$$\Rightarrow\quad |\vec{b}|\ |\vec{c}|\ \sin A = |\vec{c}|\ |\vec{a}|\sin B \quad\Rightarrow\quad b\sin A = a\sin B\ /\div AB$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \quad \text{..........}\ (ii) \quad \text{یا} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \quad \text{..........}\ (ii)$$

د پورته په شان که چیرې د (i) د رابطې دواړه خواوې په $\vec{b}$ وکتورکې په وکتوري ډول ضرب شي، لاسته راځي چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b} = -\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}$$

$$(\vec{b}\times\vec{b})+(\vec{c}\times\vec{b}) = \vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{b}\times\vec{b}=0 \quad\Rightarrow\quad (\vec{c}\times\vec{b}) = \vec{b}\times\vec{a}$$

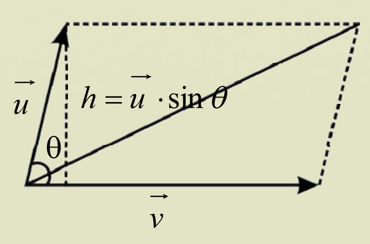
$$|\vec{c}||\vec{b}|\sin A = |\vec{b}||\vec{a}|\sin C$$

$$c\sin A = a\sin C\ \ /\div ac$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{.....}\ iii \qquad \text{یا} \qquad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

د (ii) او (iii) معادلو له پرتلې (مقایسې) څخه د ساین قضیه لاسته راځي: $\dfrac{a}{SinA} = \dfrac{b}{SinB} = \dfrac{c}{SinC}$

4- **د یوې متوازي الاضلاع مساحت**: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي، د دوی ترمنځ زاویه θ د لاندې شکل په څیر په پام کې نیسو. ګورو چې $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د متوازاې الاضلاع ضلعې دي چې د هغې د مساحت د پیداکولو لپاره کولای شو، ولیکو:



ارتفاع × قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

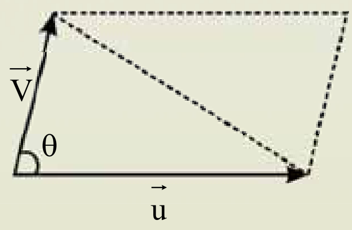
ځرنګه چې: $|\vec{v}|$ = قاعده او $|\vec{u}|\sin\theta = h =$ ارتفاع ده

$|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta = |\vec{u}\times\vec{v}|$ = د متوازي الاضلاع مساحت

يعني د يوې متوازي الاضلاع مساحت، د يوې متوازي الاضلاع د ضلعو د وکتوري ضرب له حاصل څخه عبارت دی چې د متوازي الاضلاع ضلعې هم دي.

پايله: څرنګه چې د يوه مثلث مساحت د متوازي الاضلاع مساحت نيمايي دی، نو د مثلث مساحت د لاندې شکل په پام کې نيولو سره عبارت دی، له:

د مثلث مساحت $= \frac{1}{2}$ (د متوازي الاضلاع مساحت) $= \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$



پوښتنې

1. که $\vec{a}_1 = t^2+t+2$ ، $\vec{a}_2 = 2t^2+t$ او $\vec{a}_3 = 3t^2+2t+2$ وي وښاياست چې نومړي وکتورونه خطي خپلواکي لري؟
2. وښاياست چې $\vec{a} = 2i+3j+4k$ او $\vec{b} = 4i+6j+8k$ وکتورونه يو له بل سره کوم ډول خطي اړيکه لري؟
3. ثبوت کړئ چې $\vec{a}_1 = 2i$ ، $\vec{a}_2 = 5j$ او $\vec{a}_3 = 9k$ وکتورونه خطي خپلواکي لري.
4. د هغه مثلث مساحت پيدا کړئ چې راسونه يې د $A(1,-1,1)$ ، $B(2,1,-1$ د او $C(-1,1,2)$ وکتورونو په واسطه درکړل شوي وي. همدارنګه هغه واحد وکتور چې پر ABC مستوي عمود وي، مطلوب دي.
5. د هغه متوازي الاضلاع مساحت پيدا کړئ چې: د $P(0,0,0)$، $Q(-1,2,4)$ ، $R(2,-1,4)$ او $S(1,1,8)$ وکتورونو په واسطه ځانګړې شوي وي.
6. که $\vec{u} = 2i-j+k$ ، $\vec{v} = 4i+2j-k$ سره وي، د لاندې وکتورونو د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

i) $\vec{u}\times\vec{u}$ ii) $\vec{u}\times\vec{v}$ iii) $\vec{v}\times\vec{u}$

د څپرکي مهم ټکي

د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه: هغه کمیتونه چې هم جهت اوهم مقدار ولري وکتور نومېږي. هغه وکتورونه چې اوږدوالی یې مساوي او عین جهت ولري، یو له بله سره د ممثلو وکتورونو په نامه یادیږي. هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پرته وي شعاع وکتور (Position Vector) بلل کیږي. یو وکتور په مستوي کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ په څیر ښودل کیږي. چې a_x او a_y د x او y محور پرمخ له فاصلې او ترتیب څخه عبارت دی.

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: که $P(x_1,y_1)$ وکتور مبداء او $Q(x_2,y_2)$ د پای ټکی د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور وي. په دې ډول $\vec{a}$ وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ ښیو او د $\overset{\Delta}{PQN}$ قایم الزاویه مثلث او $|\vec{a}|$ وکتور اوږدوالي له مخې لرو چې:

د P او Q ټکو ترمنځ واټن، $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ د $\vec{a}$ اوږدوالې د P او Q منځنې ټکی $\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}\\\frac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=M$ د $\vec{PQ}$ د منځنې ټکې وضعیه کمیتونه یا مختصات دی.

واحد وکتور: هغه وکتور چې د راکړل شوی وکتور په عین جهت پروت او یو واحد اوږوالی ولري، د واحد وکتور په نامه یادیږي.

مثال: $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په قایم سیستم کې د x او y د یوې مستوي د محورونو په جهت واحد وکتورونه دي، په داسې حال کې چې $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ په فضاکې د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د x، y او z محورونو په جهت واحد وکتورونه دي.

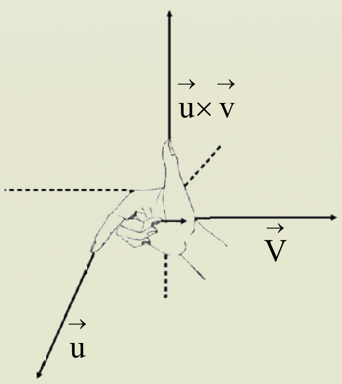
د وکتورونو سکالري ضرب: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د سکالري ضرب حاصل یې په مستوي او فضاکې عبارت دی له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,Cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه ده. او د وکتوري ضرب حاصل یې یو وکتور دي چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ په واسطه ښودل کیږي، عبارت دی، له: $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\,Sin\theta\cdot\vec{n}$

په داسې حال کې چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ پر وکتورونو عمود دی او $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونه سره د ښي لاس قاعدې په واسطه تړاکل کیږي.

د ښي لاس قاعده: که د شهادت ګوته په قایم ډول کږه شي، لکه د لاندې شکل په شان، په دې صورت کې د شهادت ګوته د $\vec{u}$ محور په جهت، د ځنګل په جهت د $\vec{v}$ محور او غټه ګوته د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور حاصل ضرب ښیي.

په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:



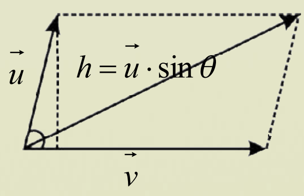
کــه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ ورکړل شوي وي، په دې صورت کې وکتوري حاصل ضرب یعنې $\vec{a}\times\vec{b}$ عبارت دی له:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مساحت او د وکتوري ضرب حاصل: د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د وکتوري ضرب قیمت یې د متوازي الاضلاع له مساحت څخه عبارت دی، چې د وکتورونو په واسطه په لاندې شکل کې تشکیلیږي.

$|\vec{u}\times\vec{v}|=$ د متوازي الاضلاع مساحت



د څپرکي پوښتنې

1): که $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ او $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ وي:

a): $\vec{a} \cdot \vec{b}$ b): $\vec{b} \cdot \vec{a}$ مطلوب دی

2): که چېرې د $P(2,3)$ او $Q(6,-2)$ ټکي د $\vec{op}$ او $\vec{OQ}$ شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې د P او Q په مستوي کې د $xi + yj$ په څير وليکئ.

3): که چيرې $A(1,-1)$، $B(2,0)$، $C(-1,3)$ او $D(-2,2)$ درکړل شوي وي، د $\vec{AB}$ او $\vec{CD}$ وکتورونو حاصل جمع مطلوب ده.

4): که چيرې $A(2,5)$، $B(-1,1)$ او $C(2,-6)$ درکړل شوي وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{AB} = ?$ $ii)\ 2\vec{AB} - \vec{CB} = ?$ $iii)\ 2\vec{CB} - 2\vec{CA} = ?$

5): که چېرې $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$، $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ او $\vec{w} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ورکړل شوي وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$ $ii)\ \vec{v} - 3\vec{w}$ $iii)\ \left|3\vec{v} + \vec{w}\right| = ?$

$(iv$: د $\vec{u}$، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ راکړل شوو وکتورنو په جهت واحد وکتورونه پيدا کړئ

6): د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د $\vec{a} \cdot \vec{b}$، $\vec{b} \cdot \vec{a}$ او وکتوري ضرب حاصل د $\vec{a} \times \vec{b}$ او $\vec{b} \times \vec{a}$ پيدا او دوه په دوه يې پرتله کړئ، که چيرې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په لاندې توګه وي:

$$i)\ \begin{cases} \vec{a} = 2i + j - k \\ \vec{b} = i - j + k \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} a = i + j \\ b = i - j \end{cases}$$

$$iii)\ \begin{cases} \vec{a} = 3i - 2j + k \\ \vec{b} = i + j \end{cases} \qquad iv)\ \begin{cases} \vec{a} = -4i + j - 2k \\ \vec{b} = 2i + j + k \end{cases}$$

7): د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کيږي:

$i): \quad P(0,0,0), \quad Q(2,3,2), \quad R(-1,1,4)$

$ii): \quad P(1,-1,-1), \quad Q(2,0,-1), \quad R(0,2,1)$

8): د هغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوي وي.

$i): \quad A(0,0,0), \quad B(1,2,3), \quad C(2,-1,1), \quad D(3,1,4)$

$ii): \quad A(1,2,-1), \quad B(4,2,-3), \quad C(6,-5,2), \quad D(-3.5,-4)$

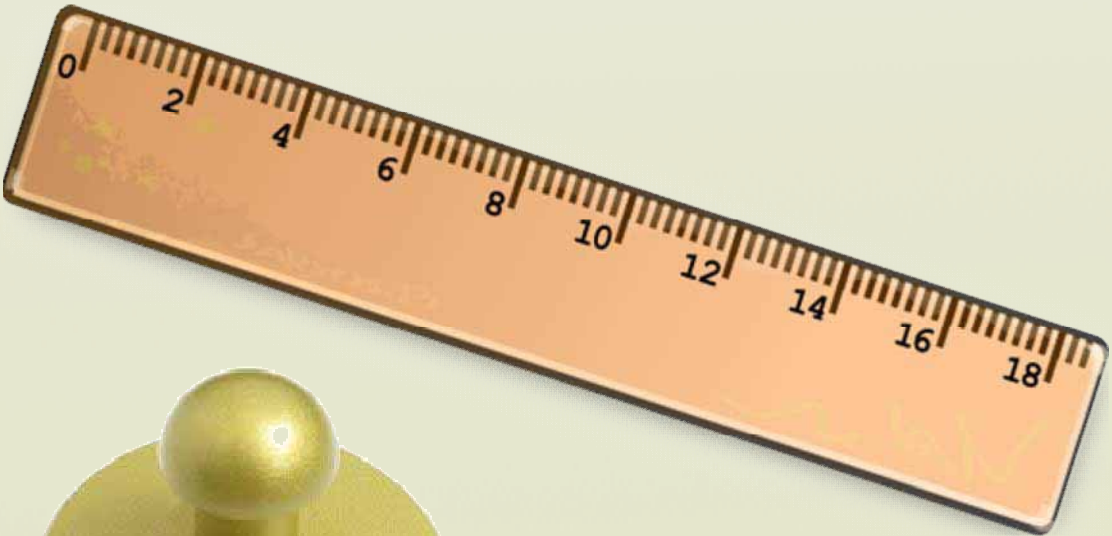
$iii): \quad A(1,-1,1), \quad B(-1,2,2), \quad C(-3,4,-5), \quad D(-3,5,-4)$

9): کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي؟

$i): \quad \vec{u} = 5i - j + k, \quad \vec{v} = j - 5k, \quad \vec{w} = -15i + 3j - 3k$

$ii): \quad \vec{u} = i + 2j - k, \quad \vec{v} = i + j + k, \quad \vec{w} = -\frac{\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j}$

اتم څپرکی
احصائیه

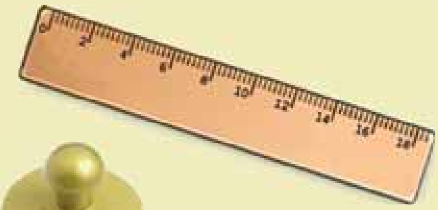


$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

دبدلونونو ضریب

Coefficient Variations

که چیرې د یوې ټولنې پراګنده ګي په متر او د بلې ټولنې په کیلوګرام ښودل شوې وي. آیا فکر کولای شئ چې دغه دواړه پراګندګي په دواړو ټولنوکې د پرتلې وړ دي او که نه؟



$$\frac{150kg}{170cm}=\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}}=?$$

فعالیت

10 تنه زده کوونکي له خپل ټولګي څخه په تصادفي ډول وټاکئ؟

- د زده کونکو ونه او وزن تشخیص کړئ.
- د زده کوونکو د ونې او وزن واریانس او معیاري انحراف محاسبه کړئ.
- آیا فکر کولای شئ چې د دې دواړو متحولینو د پراګندګي د میزان پرتله د واریانس او معیاري انحراف له لارې امکان لري؟ ولې؟
- که چیرې معیاري انحراف په اوسط ووېشل شي، نو د په لاس راغلي مقدار یا عدد واحد به څه وي؟
- د بدلونونو یا تغییراتو ضریب یا نسبي پراګنده ګي داسې کاروني لري، چې واریانس او معیاري انحراف هغه نه لري. یو له دغو کارونو څخه د دوو نا متجانسو ټولنو پرتله ده چې د یادولو وړ ده.

دبدلونونو یا تغییراتو ضریب چې په $C\cdot V$ ښودل کېږي عبارت له هغه خارج قسمت څخه دی، چې د معیاري انحراف پر اوسط مطلق بې واحده عدد دی په لاس راځي یعنې:

$$C\cdot V=\frac{S}{\bar{x}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}}=\text{دبدلونونو یا تغییراتو ضریب}$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضریب په لاس راځي:

$$C\cdot V=100\cdot\frac{S}{\bar{x}}$$

- د بدلون ضریب یوازې د مثبتو ډېټاوو لپاره تعریف شوی وي.
- که چیرې ټوله ډېټا سره برابره وي، د بدلون ضریب مساوي په صفر دی.
- که ټوله ډېټا په یو مثبت عدد کې ضرب شي، د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

- که په ټوله ډېټا یو مثبت عدد ورزیات شي، د بدلون نوی ضریب چې په لاس راځي له لومړي ضریب څخه کوچنی دی.

لومړی مثال: د لاندې ډېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ:

$$\{1,3,5\}$$

حل: د فورمول له مخې لیکلای شو:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 (5-3)^2}{3} = \frac{4+4}{3} = 2.67$$

$$S = \sqrt{2.67}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2.67}}{3} = 0.543$$

دویم مثال: د تصویري تلویزوني لامپونو یو تولیدونکی دوه ډوله لامپونه A او B تولیدوي، په داسې حال کې چې د A متوسط عمر مساوي په 1495 او د B متوسط عمر مساوي په 1875ساعته دی او معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره 280 او 310 دي، تولیدوي.

د کوم یوه تصویر لامپ تصویر له پاسینو ډولونو څخه د نسبي پراګنده ګي(یا دبدلون ضریب) قیمت زیات دی؟

حل: د فورمول له مخې لرو چې:

$$C \cdot V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\%$$ د A لامپونو د بدلون ضریب

$$C \cdot V_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\%$$ د B لامپونو د بدلون ضریب

څرنګه چې $C \cdot V_A > C \cdot V_B$ څخه دی، له دې کبله د A لامپ ډېره پراګند ه ګي لري، ولې ټېنګښت یې کم دی.

پوښتنې

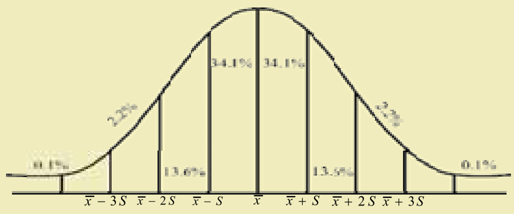
1. دلاندې ډېټا د بدلون یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟

1 3 4 5 6

2. که چیرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغییراتو ضریب څو دی؟

3. ستاسو د ټولګي د زده‌کوونکو د سن دبدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغییر یا بدلون کوي؟ کمېږي او که ډېرېږي؟

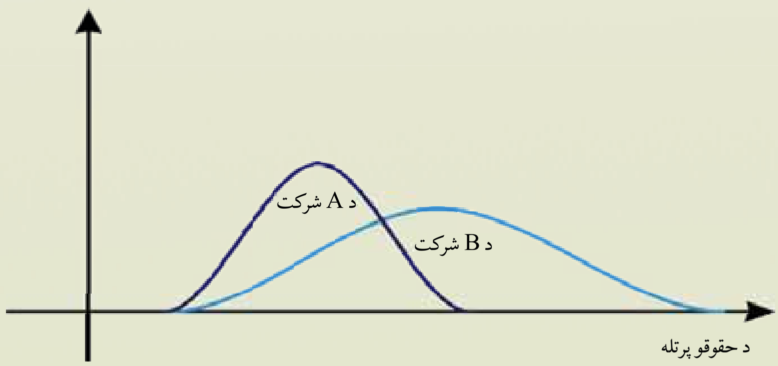
په نورمال منحني کې پراګنده ګي(تيتوالی)



اوريدلي به مو وي چې وايي: يو ښه تصوير د زر کلميو ارزښت لري.
لاندې شکل ته وګورئ، د هغه په اړوند فکر او بحث وکړئ.

فعاليت

لاندې دوه ګرافونه د دوه A او B شرکتونو د حقوقو تأديه ښيي.



- کوم شرکت په اوسط ډول د حقوقو تاديه ډيره لري؟
- کوم شرکت د حقوقو د تأديې په ميزان کې خپلو کارمندانو ته لږه پراګنده ګي لري؟
- د دواړو شرکتونو د حقوقو تأديات سره پر تله کړئ.

لاندې ټکي د اوسط او معياري انحراف په نورمال منحني کې صدق کوي.

- که چيرې $\bar{x}$ اوسط او S معياري انحراف وي؛ نو 68% دپلټنې موارد د $(\bar{x}-S \ , \bar{x}+S)$ په فاصله کې يعني د اوسط په شا او خوا د معياري انحراف په فاصله کې ځای لري.
- 96% د پلټنې موارد د $(\bar{x}-2S \ , \bar{x}+2S)$ په فاصله کې يعني د اوسط په شاوخوا د دوه معياري انحرافونو په فاصله کې ځای لري .
- 99% د پلټنې موارد $(\bar{x}-3S \ , \bar{x}+3S)$ په فاصله کې يعني د اوسط په دواړو خواوو درې معياري انحرافونو په فاصله کې قرار لري.

- په یوه نورمال منحني کې له $2S$ څخه ډېر انحراف غیر عادي او له $3S$ څخه زیات انحراف زیات غیر عادي شمېرل کېږي.

هغه ډېټا چې د $3S$ په اندازه له اوسط څخه فاصله یا واټن ولري؛ نو باید د پراګنده ګي یا تیتې ډېټا په نامه وګڼل شي.

مثال: که د یوې مؤسسې د کارکوونکو د معاش اوسط 12500افغانۍ او معیاري انحراف یې مساوي په 700 افغانۍ وي نو:

الف: له نورمال توزیع څخه د فیصدي په ګټه اخېستو، د ورکړل شوي معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: آیا ویلای شي چې د 1400افغانیو معادل معاش یو غیر عادي معاش دي؟

د الف حل: لومړی د $\bar{x}\pm S$ ، $\bar{x}\pm 2S$ ، $\bar{x}\pm 3S$ قیمتونه په لاس راوړو.

فاصله د S له مخې	فاصله د افغانیو له مخې	فیصدي
$\bar{x}\pm S$	11800 – 13200	68%
$\bar{x}\pm 2S$	11100 – 13900	96%
$\bar{x}\pm 3S$	10400 – 14600	99.6 %

د ب حل: لومړي $\bar{x}-1400$ په لاس راوړئ چې مساوي په 1500 کېږي؛ یعنې 1400 افغانیو په اندازه 1500 افغانۍ له اوسط څخه ډېرې دي، که چېرې اوس دغه رقم په S ووېشو په لاس را ځي:

$$\frac{1500}{700}=2.1$$

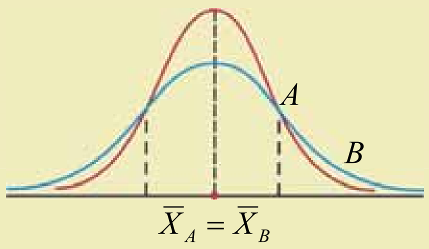
په دې ډول د 1400 افغانیو معاش غیر عادي معاش دی، ځکه چې د 2S له اندازې څخه زیات او له $\bar{x}$ څخه پورته دی.

پوښتنه

که چیرې 62.28% فیصده مشاهدات د $(\bar{x}-S\,,\,\bar{x}+S)$ په فاصله کې پراته وي، آیا ویلای شئ، چې 95.45%او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انټروالونه له نورمالي منحني سره وښایاست؟

دنورمال توزیع دډول شاخصونه

د مرکزي پراګندګي دوه شاخصونه یو زیات شمېر د یوې احصایوي مجموعې اطلاعاتو ته په لنډ ډول انعکاس ورکوي. ددې لپاره چې د یوې احصایوي مجموعې اطلاعات، تناظر او د مثبت او منفي اشارو لرونکي وي؛ نو له کوم ډول منحني څخه باید ګټه واخلو.



فعالیت

- په یو ه نورماله توزیع کې وسط، اوسط او د موډ شاخصونه څه وخت سره مساوي دي؟
- که توزیع د اوسط په اطراف کې متناظره نه وي، د وسط اوسط او موډ د کمیتونو په اړه څه فکر کوي؟
- که چیرې یوه توزیع متناظر ه وي؛ نو د اوسط او وسط تفاضل څو ده؟
- که چیرې دواړه توزیع ګانې یو شان اوسط او تناظر ولري؛ نو د جګوالي او ټیټوالي له اړخه به څه وضعیت ولري؟

دتوزیع د ډول شاخصونه په دوو لاندې حالتونو څېړل کېږي:

1- **د خیمېدلو**(skewness)(**خمیده ګي**) **شاخص**: هغه توزیع چې د اوسط په دواړو خواوو متناظره نه وي، خمېدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضریبونو بنودل کېږي.

الف: د خمېدلو ضریب: دا هغه شاخص دی چې د خمېدلو د میزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي، چې په لاندې ډول تعریف شوی دی:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^3}{S^3}$$

هغه عدد دی چې یوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخېستل کېږي.

که $\alpha_3 = 0$ وي؛ نو توزیع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي؛ توزیع مثبت خمېدل (possitve skewness)لري، یعنې ښي لورې ته خمېده‌ګي لري.

او که $\alpha_3 < 0$ وي؛ توزیع منحني منفي خمېدل (negative skewness)لري یعنې کیڼ لورې ته خمېده‌ګي لري.

که چیرې د کثرت جدول موجود وي، خمېده‌ګي(عدم تناظر) یې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^3}{S^3}$ فورمول په واسطه پیداکېږي. چې f_i فریکونسي ښيي.

ب: د پیرسون د خمېدلو ضریب: د پیرسون ضریب په لاندې ډول تعریف شوی دی.

$$Sk_{(p)} = \frac{3(\bar{x}-med)}{S}$$

په مناظره توزیع کې د پیرسون د خلمیدلو ضریب مساوي په صفر دی. د پیرسون د خمېدلو د لو ضریب مثبت او منفي قیمتونه په ترتیب سره د توزیع د منحني مثبت یا منفي خمېدل ښیي.

2- **د پړسوب kurtosis شاخص**: د پړسوب شاخص ددې ښودونکی دی چې د توزیع یوه منحني څه وخت جګه او څه وخت ټیټوالي لري.

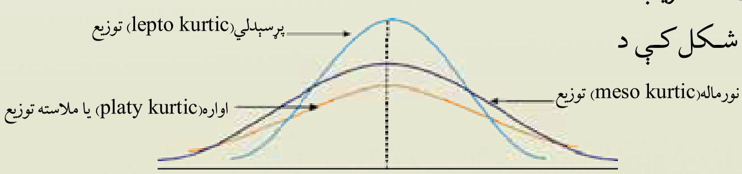
د پړسوب شاخص هغه معمولي شاخص دی چې د یوې منحني د پړسېدلو د اندازه کولو لپاره په کار اچول کېږي او په لاندې ډول تعریف شوی دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{S^4}$$

که د کثرت جدول په لاس کې ولرو، نو د پړسوب شاخص فورمول $\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^4}{S^4}$ دی چې دلته f_i فریکونسي، x_i ډېټا او $\bar{x}$ د x_i اوسط او S معیاري انحراف دی.

د پړسوب شاخص د توزیع په ځای او پراګنده ګي پورې اړه نه لري. دغه شاخص د پرتله کیدو لپاره په کار لوېږي.

مثال: مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د α_4 ضریب د درې ډوله خمېدلو او پړسوب ډولونه چې په شکل کې د هغوی توزیع ښودل شوې ده ښیي.



حل: د نورمالې توزیع د پړسوب د درجې او میزان د پرتله کېدو لپاره لکه یو سټنډرډ په کار اچول کېږي.

د نورمالې توزیع لپاره د α_4 قیمت مساوي په 3 دی، په داسې حال کې چې که چیرې α_4 له 3 څخه زیاته وي نظر نورمال منحني ته د منحني پړسوب زیات دی.

یا په بل عبارت یوه پړسیدلي توزیع چې څوکه لري او که چیرې α_4 له 3 لږ وي، نظر نورمالې منحني ته یې پړسوب کم دی چې د ملاستې یا اوارې توزیع په نامه یادېږي.

پوښتنې

د یوه ټولګي د زده کوونکو د احصایې د مضمون نمرې په لاندې ډول ورکړ شوي دي، د پیرسون د پړسوب ضریب حساب کړئ.

نمرې	د زده کوونکو شمېر
40-50	4
50-60	6
60-70	10
70-80	4
80-90	4
90-100	2

څو متحوله ټولنې

که چیرې د خپل یوه ټولګیوال د ونې په اندازه وپوهېږئ، کولای شئ هغه ته په پام د هغه د وزن په اندازه پوه او په دې اړوند فکر وکړئ.

فعالیت

آیا په تېرو درسونو کې مو د اشخاصو د ونې او وزن په اړوند یو ځای مطالعه او څېړنه کړې ده.

- فکر کولای شئ چې د یوه سړي د ونې او وزن مقدار د یو متحول په توګه کولای شو چې ارائه کړو؟
- که وغواړو چې د یوه ټولګي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار یو ځای وڅېړو، نو دغه یوه ټولنه ده.
- دخپلو 10 تنو ټولګیوالو ونې او وزن اندازه کړئ.
- په لاس راغلې ډېټا د مرتبو جوړو په توګه ولیکئ.
- هغه ټکی چې د مرتبو جوړو په مرسته په مستوي کې ټاکل کېږي، څه ډول شکل لري؟د یوه خط په واسطه یې وصل کړئ.
- آیا ویلای شئ هغه ټکي چې په مستوي کې وصل شي، کوم شکل لري؟

له پاسني فعالیت څخه پوهېږو چې د بحث موضوع، دوه ډوله متحولین دي. تر اوسه مو په تېرو درسونو کې داسې ټولنې پلټلې چې ټولنو په هغوی کې یوازې یو متحول درلوده اوس غواړو داسې ټولنې ولټوو چې دوه او یا له هغو څخه زیات متحولین ولري، دکار دآساني لپاره معمولاً د یو یا څو متحولینو تر منځ درياضیکي اړیکې په مرسته د قایمو مختصاتو په قایم سېستم کې جوړېږي.

په لومړي ګام کې په دې منظور د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات را ټول شي او په دویم ګام کې را ټول شوي معلومات د ارزښت لرونکو متحولینو په څېر په یوه مستوي کې راټول او په نښه کېږي، هغه شکل چې د دغو ټکو له وصلېدو څخه لاس ته راځي، مونږ ته یو ګراف را ښیي.

مثال: یو متخصص د غذایي رژیم یو ډول تأثیر په یو شمېر موږکانو څېړلی دی. په دې ډول یې د هر موږک لومړنی وزن اندازه کړی او بیا یې د عملیې په تطبیق پیل کړي چې په پای کې یې بیا د موږکانو وزن اندازه کړی چې لاندې ډېټا په لاس راغلې ده: $(2,4)$, $(3,5)$, $(1,7)$, $(2,3)$, $(1,8)$

په دې ډول لومړی مختصه د موږك لومړنی او دويمه مختصه د موږك وزن دغذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته ښيي.

- ډېټا په يوه سطري او ستوني جدول کې ترتيب کړئ؟
- که چيرې ډېټا د يوې ټولنې په څېر وګڼل شي، نو دغه ټولنه به څو متحولين ولري؟

حل: لاندې سطري جدول په پام کې نيسو:

د موږکانو شمير	1	2	3	4	5
د موږکانو لومړني وزن	1	2	1	3	2
د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته د موږکانو وزن	8	3	7	5	4

لاندې ستوني جدول په پام کې نيسو.

د موږکانو شمير	د موږکانو لومړني وزن	د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته د موږکانو وزن
1	1	8
2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

پاسنی ډېټا يوه دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

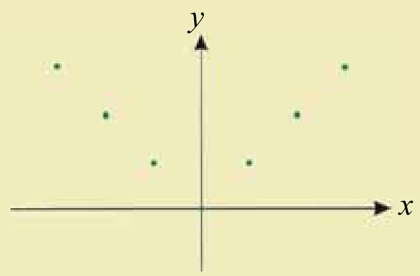
پوښتنه

د زراعتي محصولاتو دلوړوالي لپاره فکتورنه، لکه اوبه کود د کود ډول لمر او د خاورې ډول موثر ګڼل کېږي، آيا ويلی شئ چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولينو سره سروکار لرئ؟

د پراګنده ګي ګراف

Scatter diagram

مخامخ شکل ته په پام ، هغه ټکي چې په مستوي کې په نښه شوي دي، د مرتبو جوړو په ډول ترتیب او ریاضیکي معادله یې ولیکئ:



فعالیت

لاندې مرتبې جوړې ورکړل شوي دي:

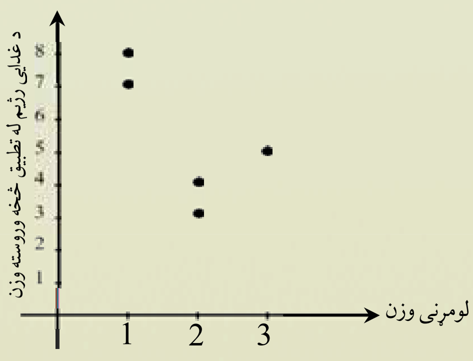
(1,2) (2,3)   (3,4) (4,5)

- د ورکړل شوو مرتبو جوړو ګراف په دقیق ډول رسم کړئ.
- مشخص شوي ټکي سره ونښلوئ او ریاضیکي معادله یې پیدا کړئ.
- په لاندې ډول د دغې ډېټا د هر یوه، دویمه مختصه په لاندې ډول بدلوو.
- د هر ټکي لپاره یوه سکه پورته وغورځوئ، که شېر راغله په y یو واحد اضافه او که خط راغی له y څخه یو واحد کم کړئ، د په لاس راغلو ټکو یا تغییراتو ګراف رسم کړئ.
- دغه عملیه څو ځلې تکرار، خو دا ځل کله چې قیمتونه زیات یا کموي، بدلون مه ورکوئ په x او y پورې تړلې قیمتونه څنګه تغیر کوي؟

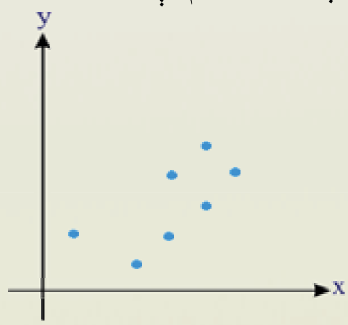
مثال: لاندې مرتبې جوړې چې پر موږکانو دغذایي رژیم تأثیراتو څخه مو په لاس راوړي دي، په پام کې ونیسئ: (2,4)   (3,5)   (1,7)   (2,3)   (1,8)

دغه مرتبې جوړې د مخامخ شکل په څېر په یوه مستوي کې ښودل شوي دي.

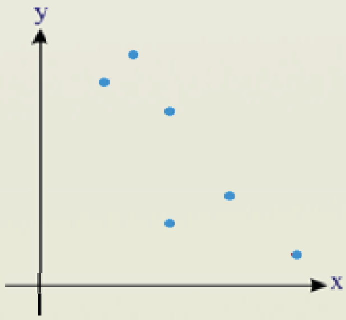
پاسنی ګراف چې د موږکانو وزن راښیي، د هغو پاشلو ټکو مجموعه په مستوي کې ده چې د اړوندې ډېټا په اندازه کیدلو په یوه دوه متحوله ټولنه کې د مختصاتو په سیستم کې لاسته راځي.



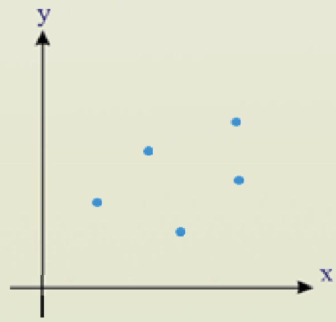
مثلاً: لاندې ګرافونه په پام کې ونیسئ:



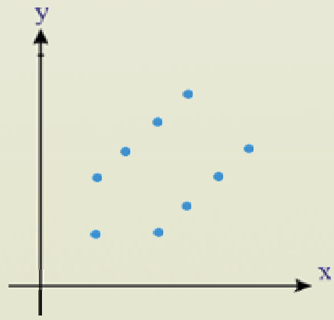
(الف)



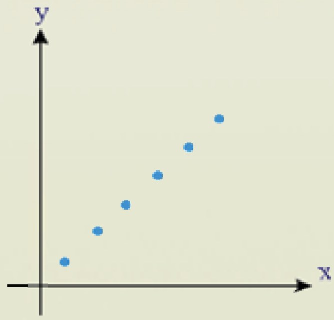
(ب)



(ج)



(د)



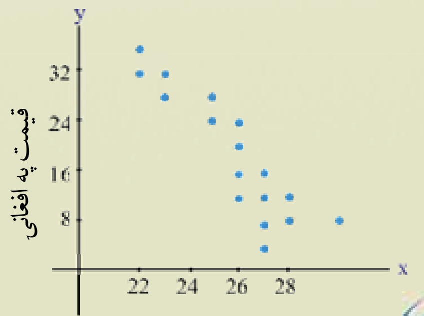
(هـ)

د(الف) په ګراف کې لیدل کېږي چې که چیرې د x قیمتونه زیات شي؛ نو د y قیمتونه هم زیاتېږي، خو د (ب) په ګراف کې بر عکس د x د قیمتونو په زیاتوالي د y قیمتونه کمېږي.

د(ج) په ګراف کې د x په قیمت کې تغییرات هیڅ ډول اطلاع د y دبدلونونویه اړوند نه ورکوي ځکه د x قیمت په درلودلو سره په ډېر پام په دې ګراف کې د(الف) او (ب) ګرافونو په پرتله زیاته ده، د ( ) پـه ګراف کې د y د قیمت حدس په ډېرې پاملرنې صورت مومي.

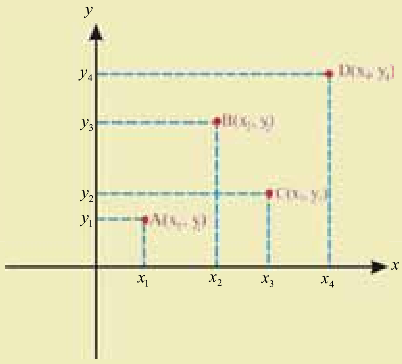
پوښتنې

لاندې ګراف دیو شمیر تراکترونو عمر راښیي، آیا ددې دوو متحولینو تر منځ کومه اړیکه یـا ارتبـاط وینـي؟ توضیح یې کړئ.



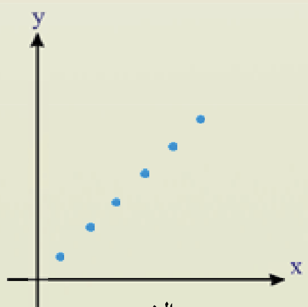
پیوستون او دپیوستون ضریب

د A, B, C او D ټکي لکه مخامخ شکل راکړل شوي دي، آيا شوني ده چې ټکي په يوه مستقيمه کرښه سره وصل شي، ولې؟

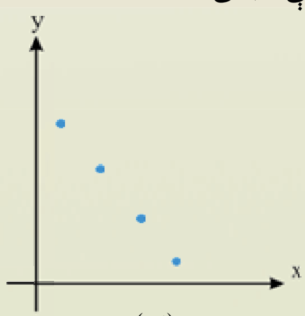


فعالیت

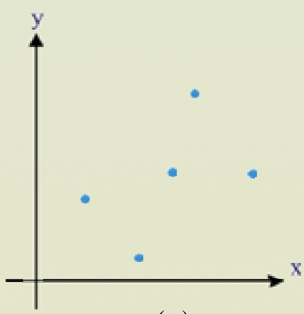
لاندې شکلونه په پام کې ونيسئ:



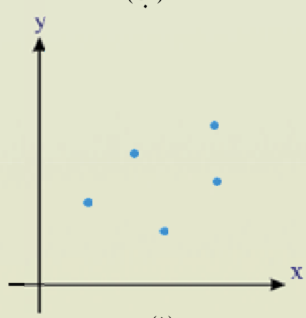
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

- د (الف) او (ب) په شکلونو کې کولای شو چې د y متحول د هغې کرښې په مرسته چې له دغو ټکو تېرېږي وټاکو.
- د (الف) او (ب) په شکلونو کې د x او y تر مينځ څه ډول اړيکه ده؟
- آيا کولای شو چې د(ج) او(د) په شکلونو کې داسې يوه کرښه وټاکو چې ټول ټکي پرې پراته وي؟
- د(ج) او (د) په شکلونو کې د x او y ترمنځ اړيکې په څه ډول دي؟
- - د (الف) او (ب) د شکلونو اړيکې د(ج) او(د) د شکلونو له اړيکو سره پرتله او ووايئ چې د y د متحول خطا د x د متحول په مرسته په کوم شکل کې ډېره ده؟

له پاسني فعالیت څخه داسې پوهېږو چې که چیرې ټکي په مستوي کې یوې مستقیمې کرښې ته نږدې پراته وي؛ نو په دې صورت کې y د متحول خطا نظر x ته لږ ده او برعکس هر څومره چې ټکي له کرښې لرې پراته وي، نو په هم هغه اندازه د y خطا ډېره ده.

له دې کبله داسې معیار غواړو درو وپېژنو چې د ټکو پیوستون مونږ ته اندازه کړي.

هغه فورمول چې د پیوستون د محاسبې لپاره ورکړ شوې ده، د پیوستون د ضریب په نامه یاد او په r سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$r=\frac{\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{n}-(\text{د } x \text{ ونو اوسط})(\text{د } y \text{ ګانو اوسط})}{(\text{د } x \text{ ونو معیاري انحراف})(\text{د } y \text{ ګانو معیاري انحراف})}=\frac{\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\,\bar{y}}{S_x\,S_y}$$

مثال: دموږکانو د لومړني وزن او غذايي رژیم څخه وروسته ډېټا لکه لاندې جدول په پام کې ونیسئ.

د x او y دضرب حاصل	له عملیې څخه وروسته وزن y	لومړني ورن X	د موږکانو شمیره
8	8	1	1
6	3	2	2
7	7	1	3
15	5	3	4
8	4	2	5
$\sum 44$	$\sum 27$	$\sum 9$	

دلومړني او وروسته د غذايي رژیم د وزنونو تر منځ د پیوستون ضریب محاسبه کړئ.

حل: که چیرې x لومړني وزنونه او y د غذايي رژیم له تطبیق څخه وروسته وزنونه او $n=5$ د موږکانو شمېر په پام کې ونیسو، نو د x او y اوسطونه عبارت دي له:

$$\bar{x}=\frac{9}{5}=1.8 \qquad , \qquad \bar{y}=\frac{27}{5}=5.4$$

$$S_x^2=\text{د } x \text{ ونو واریانس}=\frac{(1-1.8)^2+(2-1.8)^2+(1-1.8)^2+(3-1.8)^2+(2-1.8)^2}{5}$$

$$=\frac{0.64+0.04+0.64+1.44+0.04}{5}=\frac{2.8}{5}=0.56$$

$$S_y^2=\text{د } y \text{ ګانو واریانس}=\frac{(8-5.4)^2+(3-5.4)^2+(7-5.4)^2+(5-5.4)^2+(4-5.4)^2}{5}$$

$$=\frac{6.76+5.76+2.56+0.16+1.96}{5}=\frac{17.2}{5}=3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د ډېټا شمېر}}=\frac{\sum x\cdot\sum y}{n}=\frac{(1\cdot 8)+(2\cdot 3)+(1\cdot 7)+(3\cdot 5)+(2\cdot 4)}{5}=\frac{44}{5}=8.8$$

په دې ډول په پایله کې د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته را ځي:

$$r = \text{د پیوستون ضریب} = \frac{8.8-(1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\cdot\sqrt{3.44}} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

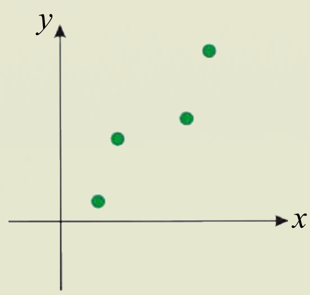
اوس داسې سوال را منځ ته کېږي چې د پیوستون د -0.67 ضریب د x او y ترمنځ د ډېر پیوستون ښودونکی ده او که نه؟ د دې سوال د ځواب د پیدا کېدو لپاره د پیوستون ضریب له لاندې مثالونو څخه په ځو مرحلو کې پـه لاس راوړو:

مثال: لاندې جدولونه په پام کې و نیسئ:

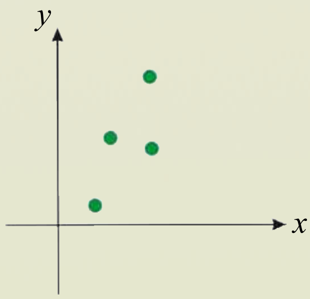
x	y
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5

x	y
1	2
2	6
3	6
4	10

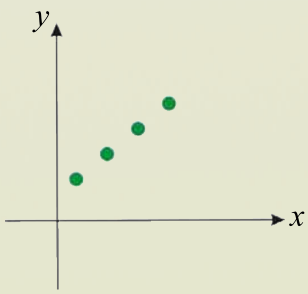
x	y
1	3
2	5
3	7
4	9



(ج)



(ب)



(الف)

د (الف) په شکل کې ټکي ټول په یوه کرښه پراته دي، نو په دې ډول د ټکو ترمنځ د پیوستون ضریب ډېر لوړ قیمت لري.

د (ب) په شکل کې ټکي د یوې مستقیمې کرښې په شاخوا پراته دي، نو له دې کبله نظر د(الف) حالت تـه د ټکـو تر منځ د پیوستون ضریب لږ دی د (ج) په شکل کې څرنګه چې ټکي د مستقیمې کرښې د(ب) د حالت پـه انـدازه نږدې پراته دي، نو باید ضریب یې په دې حالت کې د(ب) له حالته زیات، خو د(الف) له حالته لږ دی، د دې خبرې د پخلي لپاره موضوع په لاندې ډول څېړو، د پیوستون ضریب د(الف) حالت لپاره:

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{د } x \text{ ونو واریانس} = \frac{(-1.5)^2+(-0.5)^2+(0.5)^2+(1.5)^2}{4} = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\text{د } y \text{ ګانو واریانس} = \frac{(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو دضرب حاصل} = (1\cdot 3)+(2\cdot 5)+(3\cdot 7)+(9\cdot 4) = 70$$

$$r = \text{دپیوستون ضریب} = \frac{\frac{70}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{5}} = \frac{17.5-15}{\sqrt{6.25}} = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

د پیوستون ضریب د (ب) په حالت کې:

$$\bar{y} = \frac{24}{4} = 6 \quad , \quad \bar{x} = 2.5$$

د y گانو واریانس $= \frac{16+0+0+16}{4} = 8$ ، د x ونو واریانس $= 1.25$

د x او y گانو د ضرب د حاصل مجموعه $= 2+12+18+40 = 72$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{\frac{72}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

د (ج) په حالت کې د پیوستون ضریب: $\bar{y} = \frac{23}{4} = 5.75 \quad , \quad \bar{x} = 2.5$

د y گانو واریانس $= 4.6875$ ، د x ونو واریانس $= 1.25$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ گانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{4} = 16.75$$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{16.75-(2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25}\sqrt{4.6875}} = \frac{2.375}{\sqrt{5.858}} = 0.9812$$

په یاد ولرئ چې په هغو شرایطو کې چې y لږ خطا و لري(د x او y مقدارونه خط ته نږدې پراته دي) که چیرې د پیوستون ضریبونه 1او -1 وي، x او y پر یوه مستقیمه کرښه پراته دي. غیر له هغه څخه د پیوستون ضریب د دغو دوو مقدارونو تر منځ پروت دی.

پوښتنې

1- لاندې ډېټا راکړل شوې ده.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

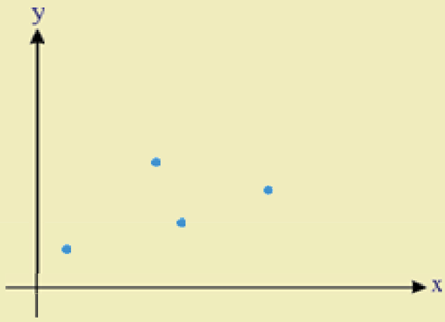
د ډېټا دپیوستون ضریب محاسبه کړئ.

2- د خپلو ټولگیوالو د ونې او وزن تر منځ د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

د خطي میلان معادله

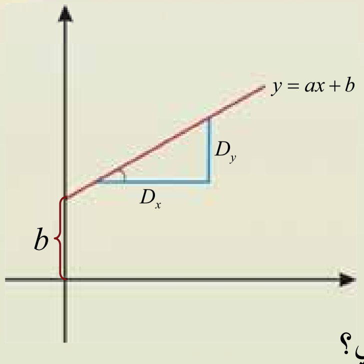
The linear regression equation

فرض کړئ چې یو پاشلي ګراف په لاندې ډول راکړل شـوی وي. یـوه مـستقیمه کرښـه چـې معادلـه یـې د $y = ax + b$ پـه ډول ورکـړل شـوې وي، پیـدا کـړئ چې ګراف یې ټولو ټکو ته نږدې فاصله یا واټن ولري.



فعالیت

په مخامخ شکل کې یوه خطي تابع(لومړی درجه) چې ګراف یې مستقیمه کرښه ده، رسم شوې ده.

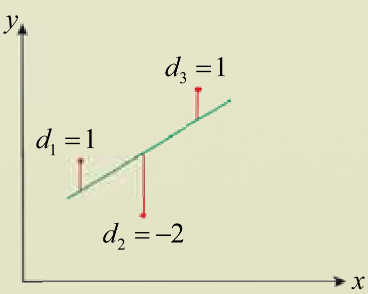


- د $y = ax + b$ خطي تابع کې a او b څه ډول مقدارونه دي؟
- د $y = ax + b$ په تابع کې د x او y متحولین په کوم نوم یادیږي؟
- د $y = ax + b$ مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ؟
- د $y = ax + b$ په معادله کې د y بدلون ، د یو واحد په اندازه په x کې و ټاکئ؟
- د $y = ax + b$ معادله کې که چیرې $a > 0$ وي؛ د تابع ګراف متزاید او که متناقص دی؟

همدغه راز که چیرې $a < 0$ سره وي، د تابع ګراف څه شکل لري؟

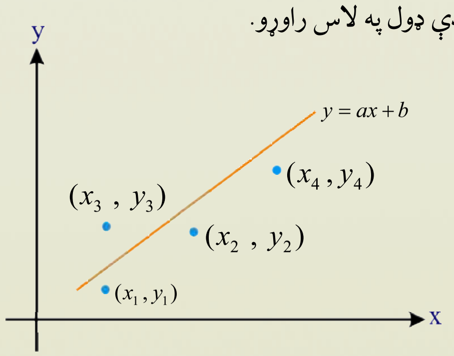
او که چیرې $a = 0$ وي، د تابع دګراف شکل و ټاکئ؟

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:



د فاصلو مجموع $d_1 + d_2 + d_3$ او $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ محاسبه کړئ.

له پاسني فعاليت څخه پوهېږو چې د $y = ax + b$ معادله يوه خطي تابع ده چې د a ضريب ددې معادلې ميل جوړ وي او کله چې a مثبت وي، مستقيمه کرښه متزايد او که چېرې a منفي وي، نو کرښه متناقصه ده.
پاملرنه وکړئ چې که د (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کې صدق وکړي، په دې صورت کې نومړې ټکي د مستقيمې کرښې په گراف پروت دی.
هر څومره چې د ټکو پاشل مستقيمې کرښې ته نژدې وي، نو د پيوستون ضريب به -1 او $+1$ ته ورنژدې وي، که چېرې د يوې مستقيمې کرښې معادله ولرو او پوه شو چې د پيوستون ضريب مناسب او کولای شو د y د متحول په مرسته متحول وټاکو او که چېرې مستقيمه کرښه ونلرو، کولای شو چې دغه کرښه په داسې يوه تگلاره چې د لږکيو(ميتود اصغري سازي)[1] مربعو په نامه يادېږي، په لاندې ډول په لاس راورو.
فرض کوو چې د پاشلو ټکو گراف(متفرقه دياگرام يا Scatrter diagram) په دې ډول راکړل شوی وي.

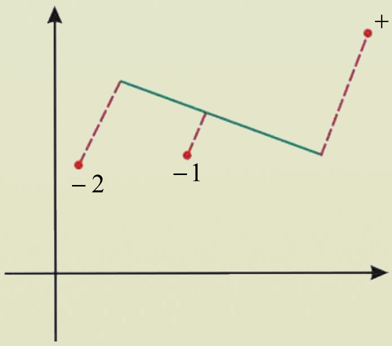


او غواړو داسې يوه کرښه چې معادله يې $y = ax + b$ وي، د ټکو له منځ څخه داسې تېره کړو چې ټولو ټکو ته نږدې وي. په دې تگلاره کې بايد په مناسب ډول د کرښې معادله داسې جوړه شي چې د عمودي انحرافونو د دويم توان مجموع له مستقيمې کرښې څخه لږ تر لږه اصغري وي، مخ کې له فورمول څخه لاندې مثال په پام کې نيسو:

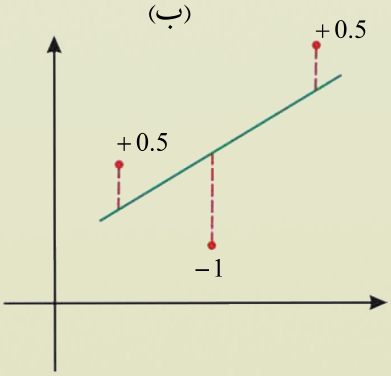
x	1	5	9
y	6	5	7

لاندې شکلونه د دغې ډېټا لپاره رسموو او د کرښو خطاوې له مشاهدو څخه تشخيصوو.

(الف)



(ب)



the method of least square -[1]

ښکاره ده چې رسم شوې کرښه د (ب) په حالت کې په مرتبو د(الف) له حالته ښه ده.

په دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاګانو الجبري جمع صفر ده.

د (الف) حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

د (ب) حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

څرنګه چې په دواړو حالتونو کې د جمعې حاصل مساوي په صفر ده، نو له دې کبله ویلای نشو چې کومه کرښه یوه مناسبه کرښه ده. ددې لپاره چې خطاوې مثبت او منفي یو بل له منځه یو نسي، نو هره کرښه وروسته له مربع کولو جمع کوو:

$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 =$ د خطاګانو د دویم توان مجموع

$1.5 = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 =$ د خطاګانو ددویم توان مجموع

له دې کبله د کرښې د خطاګانو د دویم توان مجموع څرنګه چې د(ب) په حالت کې نظر له(الف) حالت څخه یې قیمت لږ دی، نو ویلی شوچې:

مناسبه کرښه هغه ده چې د خطاګانو د مربعګانو مجموع یې له نورو کرښو کمه وي، دغه راز کرښو ته د ریګریشن کرښې وایي.

که چیرې د ریګریشن کرښې د مقدار او هغو مشاهداتو تر منځ د مقدارونو توپیرچې منځ ته راځي په $\bar{y}$ وښیو، په دې صورت کې د دویمو توانونو د مجموع د لا کوچني والي په خاطر په لاندې ډول عمل کوو:

$$\text{د خطاګانو ددویمو توانونو مجموع} = \sum(y-\bar{y})^2 = \sum[y-(ax+b)]^2$$
$$= \sum(y-b-ax)^2$$
$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2 + \ldots..$$

په دې حالت کې x او y ثابت، a او b متحولین دي.

پرته له دې مونږ هغه تګلاره چې د a او b د محاسبې او په لاس راوړلو لپاره په کار لویدلی، ورننو ځو، یوازې د هغوی د محاسبې خطا په پام کې نیسو:

$$b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

د a او b د محاسبې دغه لاره چې د لږکیو مربعګانو تګلارې په نامه یادېږي.

پایله: د ریګریشن کرښه هغه وسیله ده چې د یو متحول د مقدار د وړاند وینې لپاره د بل متحول په حسابولو چې ورسره تړلی دی، د استفادې وړ ګرځي.

مثال:لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د y د ریگریشن کرښه نظر x ته په لاس راوړئ.

حل: څرنگه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2 \quad \Rightarrow S_x = \sqrt{2}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} \quad \Rightarrow S_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum x\,y}{n} = \frac{4+6+6+4+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{4-3\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

له دې کبله:

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b\cdot 3$$

$$a = r\frac{S_y}{S_x} = -1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2-(-1)(3) = 2+3 = 5$$

په دې ډول د ریگریشن معادله عبارت ده له: $y = ax + b = -x + 5$

پوښتنه

که چیرې $y = 2x+3$ د y د ریگریشن معادله نظر x ته او د x اوسط مساوي په 2 راکړل شوي وي، د y اوسط څومره وي؟

د اتم څپرکي مهم ټکي

د بدلون ضریب: د بدلون ضریب د معیاري انحراف له اوسط څخه عبارت دی چې مطلق بې واحده عدد دی؛ لکه:

$$\text{د بدلون ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \quad \text{یا} \quad C\cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

دغه ضریب ډېر خلې د فیصدي په ډول ښودل کېږي چې د تحول د ضریب په نامه یادېږي.

$$\text{د تحول ضریب} \quad C\cdot V = 100\cdot\frac{S}{\bar{x}}$$

د بدلون ضریب د مثبتې ډېټا لپاره تعریفېږي، په یاد یې ولرئ که چیرې ډېټا سره مساوي وي، نو د پراګندګۍ ټول شاخصونه مساوي له صفر سره دي.

په نورمال منحني کې پراګندګي: نورمال منحني د احصایوي مجموعې یوه داسې توصیفي وسیله ده چې په نورمال منحني کې ډېټا په نورمال توزیع او کثرت منحني کې متناظر پراته دي؛ نو واریانس عمده نقش لري، په حقیقت کې د دوو پارامترو مشخص کیدل او معیاري انحراف په نورمال توزیع کې په عمومي ډول مشخص او د هر ډول شاخص د محاسبې زمینه برابره ده.

د نورمال توزیع شکل شاخصونه: د اوسط او معیاري انحراف په مرسته کولای شو د لید خرنګوالی د کږېدو(خمېدو) او پړسېدو(اوج) په ډول په ښه توګه څرګند او وړاندې کړو.

د کږېدلو شاخص د کږېدو او پیوستون ضریبونو په مرسته چې د اندازه کولو او اندازو د پرتله کولو لپاره پکارېږي په لاندې ډول لیکل کېږي:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad SK_{(p)} = \frac{3(\bar{x}-med)}{S}$$

د پړسېدو(جګېدلو) شاخص د پړسېدو د ضریب α_4 په مرسته اندازه او پرتله کېږي.

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{S^4} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^4}{S^4}$$

څومتحوله ټولنې: په احصایوي څېړنو کې تر ټولو لویه موخه(هدف) وړاندوینه او د یو متحول ټاکل د بل متحول له مخې دی. کله چې د دوو شیانو ترمنځ اړیکې څېړل زموږ مقصد وي، په حقیقت کې هدف یوه دوه متحوله ټولنه ده؛ لکه د یو غاز د حجم او فشار ترمنځ اړیکه د صحت او حرکت د میزان ترمنځ اړیکه، د کرنې او د حاصل د مقدار ترمنځ اړیکه او یا هم د یوې دایرې د شعاع او مساحت ترمنځ اړیکه چې ټولې دغه راز اړیکې دوه متحوله ټولنې بیانوي. د آسانتیا لپاره معمولاً د دوه یا څو متحولینو ترمنځ اړیکه د ریاضي معادلو په مرسته وړاندې کوي.

د پراګنده‌ګي ګراف: د پراګنده‌ګي ګراف د رسمولو لپاره ډېټا د مرتبو جوړو په شکل پـه یـوه مـستوي کې د قـایمو مختصاتو په سیستم کې ښوول کېږي. کیدای شي د ټکو او پراګنده‌ګي ګراف په مرسته درې ډوله اطلاعـات زمـوږ پـه اختیار کې راکړي.

الف: آیا داسې نمونه چې د څېړنو ترمنځ اړیکه ښیي، شته او که نه؟

ب: د یو ډول اړیکې د شتون په صورت کې دغه اړیکه خطي ده او که نه؟

ج: که چیرې اړیکه خطي وي، نو څه ډول اړیکه ده؟

پیوستون او د پیوستون ضریب: پیوستون د متحولینو ترمنځ د اړیکو د مېندلو درجه ده، کله کله دواړه متحـولین په یوه لورې بدلون کوي یعنې x او y دواړه په یوه کرښه لـوی او یـاهم کـوچني شـي، چې پیوسـتون یـې مـستقیمه کرښه ده. که چیرې د دوو متحولینو اندازه یو د بل پر خلاف بدلون وکړي یعنې که چیرې x لـوی شـي y کـوچنی کېږي. او یا هم برعکس صورت نیسي.

د پېژندنې ډېر ښه معیار د پیوستون شتون او نه شتون دی او حتا د خطي پیوسـتون ډول، جهـت او میـزان د پیوسـتون ضریب دی، چې د لاندې فورمول په واسطه ښوول کېږي:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - (\bar{x}\,\bar{y})}{S_x \cdot S_y}$$

په پورتنیو اړیکو کې $\sum xy$ د x ونو او y ګانو د ضرب د حاصـل مجمـوع، $\bar{x}$ د x ونـو اوسـط او $\bar{y}$ د y ګـانو اوسط دی، همدارناز S_x د x ونو معیاري انحراف او S_y د y ګانو معیاري انحراف دی.

د ریګریشن کرښه: ریګریشن(تخمیني) د تابع د یوه متحول له قیمـت لاسـته راوړل او سـنجش څخـه عبـارت دی، چې د یو یا څو مستقلو متحولینو له ارزښت څخه په لاس راځي.

هغه معادله چې د متحولینو ترمنځ اړیکې افاده کوي، د ریګرېشن معادلې په نامه یادېږي.

کولای شو دغه معادله د ډېرو لږو مربعګانو د محاسبې په طریقـه حسـاب او همدارنګـه د a او b ضـریبونه د دغـې طریقې په مرسته په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \qquad , \qquad b = r\frac{S_y}{S_x}$$

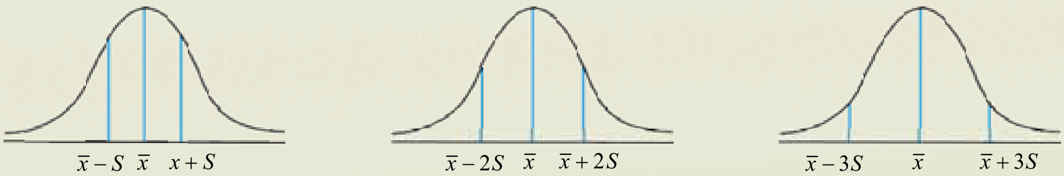
چې S_y د y معیاري انحراف او S_x د x معیاري انحراف دی، په داسې حال کې چې r د پیوسـتون ضـریب، $\bar{x}$ د x ونو اوسط او $\bar{y}$ د y ګانو اوسط دی.

د څېرکي پوښتني

1-که چيري په يوه ټولنه کې چې اوسط يې $\bar{x}=50$ او واريانس يې $S^2=64$ سره وي، د بدلون ضريب y چې له $y=2x+10$ رابطې سره سم بدلون مومي څو دی؟

2-که چيرې د هر زده کوونکی په نمرو کې 20% نمبرې ورزياتې شي، نو د نمبرو د بدلون په ضريب څه اغيزه کوي؟

3- د هغو ټولنو فيصدي چې په لاندې درکړل شوو منحني ګانو کې پرته ده، وليکئ؟



4- لاندې اړيکو ته په پاملرنې ووایاست چې کومه يوه له دغو اړيکو څخه يو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړيکې دي.

الف: ستاسو د ټولګيوالو د ونو اندازه؟

ب: د يو شي د عمومي مصرف او جنس ترمنځ اړيکه؟

ج: د يوې استوانې د حجم، جګوالي او د قاعدې د مساحت تر منځ اړيکې؟

5- د يو ټولګي د مصرف شوو ساعتونو د شمېر او د زدکوونکو د نمبرو تر منځ چې د 20% له مخې اخېستل شوی دی، د مرتبو جوړو په شکل په لاندې ډول دي:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)

(5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)

(7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کونکو د مصرف شوو ساعتونو او نمبرو تر منځ د اړيکو له مخې ګراف رسم او خپلې پايلې وڅېړئ؟

6- مخامخ ډېټا په پام کې ونيسئ:

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

په ورکړ شوي ډېټا کې د پيوستون ضريب حساب کړئ؟

7- که چيرې د پيوستون ضريب صفر ته نژدې وي، نو څه ډېره، که لږه ده؟

8- که چيرې د پيوستون ضريب د 1+ او 1− عدد ته نژدې وي، نو د y د خطا په اړوند څه وايئ؟

9- د سروې له مخې چې د يوه ښوونځي په دو A او B ټولګيو کې شوې ده، لاندې عددونه د کيلوګرام په حساب د زده کوونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

د پاسنيو اعدادو په پام کې نيولو سره:

الف: د ډېټا د پراګندګي ګراف رسم کړئ؟

ب: د اړوندې مستقيمې کرښې معادله په لاس راوړئ a او b وټاکئ؟

ج: اړونده مستقيمه کرښه نظر د ريګرېشن معادلې ته رسم کړئ؟

10- که چيرې x او y سره بشپړ پيوستون او معکوس ولري، يعنې $S_x = S_y$، نو د y نسبت x ته د ريګرېشن خط کوم دی؟

1) $y=-\frac{1}{2}x+b$ 2) $y=\frac{1}{2}x+b$ 3) $y=x+b$ 4) $y=-x+b$

11- د 20 تنو زده کوونکو د رياضي او فزيک د مضمون 20% د آزموينې پايلې چې په لاندې ډول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

زده‌کوونکي	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
د رياضي نمرې	18	8	12	18	16	6	10	6	16	10	12
د فزيک نمرې	16	10	8	18	14	10	10	6	10	14	10

زده‌کوونکي	12	13	14	15	16	17	18	19	20
د رياضي نمرې	12	10	16	18	12	6	14	14	12
د فزيک نمرې	6	12	16	12	12	8	12	14	16

ـ د ريګريشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

ـ آيا د دوو آزموينو د پايلو تر منځ اړيکې شتون لري؟

12- پر چنګښو د خوراک د مالګې د 5 او يو فيصده محلول اغيزې د يون پلازما پر ميزان د هغوی په بدن کې په لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

د مالګې په محلول کې د پاتېکېدو وخت	50	40	30	20	10	5	0
د يون پلازما ميزان(mm)	136	132	126	122	118	110	90

ـ په پاسنی جدول کې متحولين وڅېړئ؟

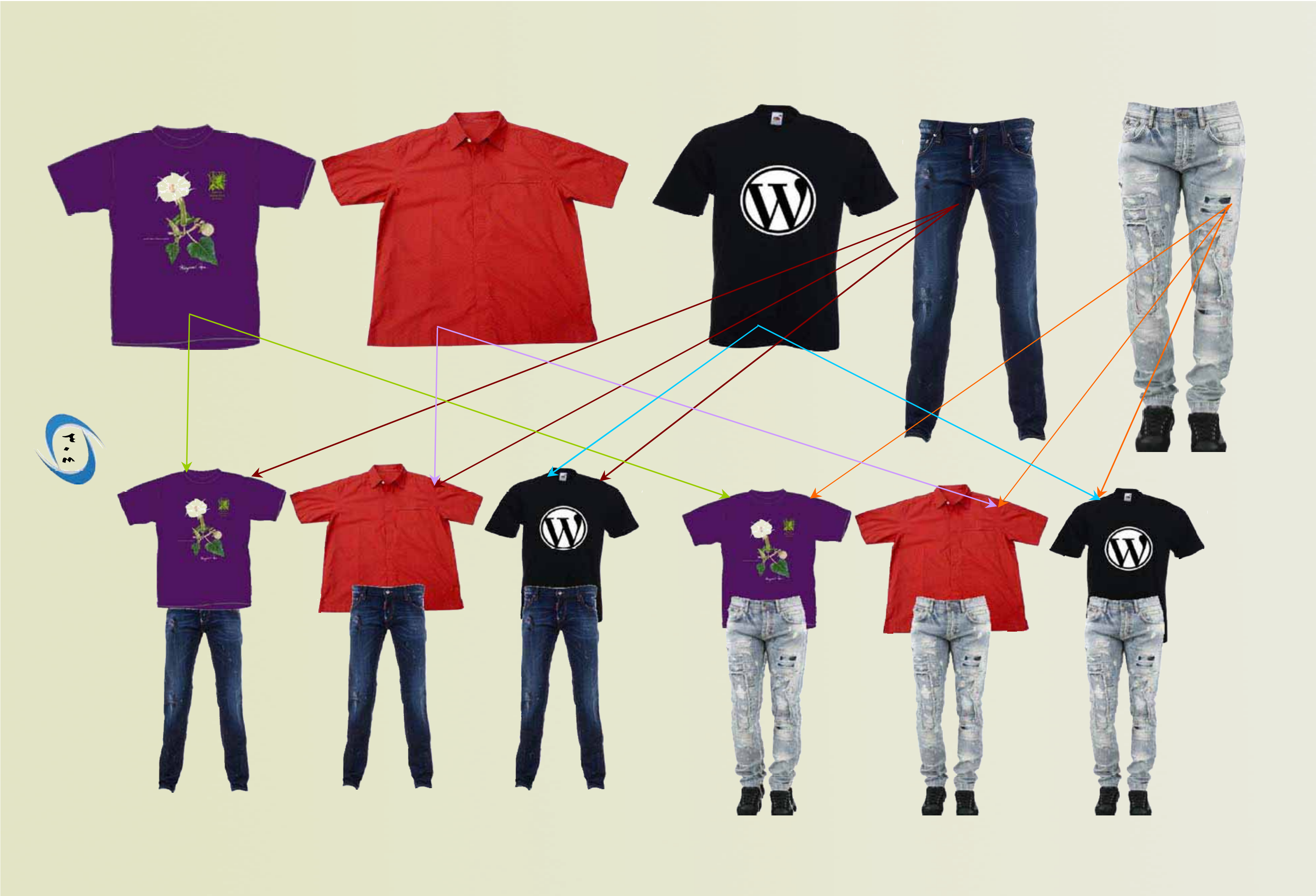
ـ په پورتنيو متحولينو کې کوم يو خپلواک او کوم يو ناخپلواک متحول دی؟

ـ يو داسې ګراف رسم کړئ چې د دواړو متحولينو ترمنځ اړيکه وښيي؟

ـ د دې ګراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښاياست؟

نهم څپرکی

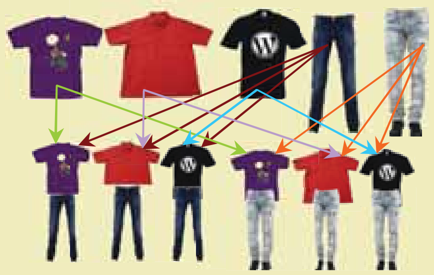
احتمالات



پرموټېشن یا ترتیب

Permutation

که چېرې درې بیلابیل کمیسونه او دوه پطلونونه ولرو، په څو ډوله کولای شو هغه سره جوړه جوړه واغوندو؟



فعالیت

خپل درې تنه ملګري وآزموئ چې په څو ډوله کولای شي په یو کتار کې و دربېږي؟

- له درې یو رقمي اختیاري عددونو څخه څو درې رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو.
- له پورتنیو عددونو څخه چې پورته مو د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره ټاکلي دي څو درې رقمي عدونه جوړولای شو، په دې شرط چې په عددکې رقم تکرار نه وی.
- د پاسني فعالیت د اول، دویم او دریم پاراګراف پایلې سره پرتله او وواییې چې څه اړیکی سره لري؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله

د n شیانو د ترتیب د شمېر ډولونه چې سره خوا په خوا راشي عبارت دي له:

- که تکرار مجاز نه وي مساوي په $n\cdot(n-1)\ \ldots\ 2\cdot 1$ سره دي.

- که تکرار مجاز وي مساوي په $\underbrace{n\cdot n\cdot\ \ldots\ \cdot n}_{n\text{ځلې}} = n^n$ سره دي.

تعریف: د یوه طبیعي عدد لپاره د $(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot n)$ حاصل ضرب په لنډ ډول په $n!$ (n – فکتوریل) ښودل کیږي. او د تعریف له مخې $1!=1, 0!=1$ سره دي.

2: د n عنصرونو د ترتیب ډولونه چې د n غړو د پرموټېشن(Permutation) په نامه هم یادېږي په P_n سره ښودل کېږي.که چیرې تکرار په ترتیب کې ناشوني او یا مجازنه وي.

نو د پاسني تعریف په پام کې نیولو سره $P_n = n!$ سره کیږي.

که چیرې په ترتیب تکرار شوني او یا مجاز وي، نو په دې صورت کې د ترتیب ډولونه او یا پرموټېشنونه په مجاز تکرار کې $(k \le n)$, $P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}$

لومړی مثال:

(i) : د لاندې عددونو قیمت پیدا کړئ.

$$3!, 8!, 5!$$

(ii): د هر یو طبیعي عدد لپاره وښیئ چې $n! = n(n-1)!$ سره ده؟

حل (i): د تعریف له مخې لرو چې:

$$3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$$
$$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$$
$$8! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40320$$

(ii) پوهېږو چې: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ \dots\ \cdot n = (1\cdot 2\cdot 3\cdot \ \dots\ \cdot n-1)(n) = n(n-1)!$

دویم مثال: د آزموینې لپاره په یوسالون کې 16 زده کوونکي له بېلابېلو ټولګیو د سوېې آزموینې لپاره راغونډ شوي دي.

په څو ډوله کولای شو د 16 مېزونو تر شا په لیکه کښېنئ چې د هر یو د ځای تغییر د ناستې یو حالت وشمېرل شي.

حل: پوهېږو چې ځواب $16!$ دي چې تکرار پکې ناشونی دی. که چیرې تکرار مجاز وي، په دې صورت کې مسئله عبارت له ترتیب د n شیانو چې k عدده یې د مثال په ډول په تکراري ډول راښکاریږي، نو په دې صورت کې لرو چې: $P_n^k = \frac{n!}{k!}$, $(k \le n)$

مثلاً په پاسني مثال کې، که چیرې 16 زده کوونکي وغواړي خپل ځایونه په خپلو لاسي بکسونو ونیسي او له دې څخه 4 تنه یو ډول لاسي بکسونه ولري، نو لرو چې:

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16 = 43680$$

که چیرې د دې مسئلې عمومي حالت په پام کې ونیسو، نو په دې صورت کې د $P_n^{(k_1, k_2,\ \dots\ , k_n)}$ n ترتیبه یا پرموټېشنونه چې په هغه کې تکرار مجاز نه او په حقیقت کې، m ګروپه شیان چې هر یو یې په ترتیب سره د $k_1!, k_2!\cdot\ \dots\ \cdot k_n!$ په اندازه سره یو شان دي، لرو چې:

$$P_n^{(k_1, k_2,\ \dots\ , k_n)} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot\ \dots\ \cdot k_n!}$$

دریم مثال: له پنځه $(5,5,5,4,4)$ عددونو څخه په څو ډوله کولای شو، پنځه رقمي عددونه جوړ کړو.

حل: پوهېږو چې د فورمول له مخې د عددونو شمیر عبارت دي له: $P_3^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$

چې په خپله عددونه په لاندې ډول دي:

55544	55454	54554	45554	45545
45455	44555	54545	55445	54455

څلورم مثال: د سبا کاروان ټرانسپورټي شرکت د کابل جلال‌آباد په لین کې 5 لوی سروېسونه او د جلال‌آباد- کنړ په لاره 3 مېنې بسه لري. په څو ډوله کولای شو، د نوموړي ټرانسپورټ په سروېسونو او مېنې بسونو کې له کابله- کنړ ته سفر وکړو؟

حل:پوهېږو له کابله تر جلال‌آباد پورې د نوموړي شرکت له سروېسونو څخه یوازې 5 امکانه وجود لري، چې د هر یوه امکان په وړاندې 3 امکانه د مېنې بس د انتخاب چانس له جلال‌آباد څخه تر کنړه، د نوموړي شرکت وجود لري.

په دې ډول ټول امکانات مساي دي په: $5 \times 3 = 15$

پنځم مثال: د $8,7,2$ او 5 عددونو په مرسته څو درې رقمي عددونه(پرته له تکراره) جوړولای شو.

حل: دې خبرې ته په پاملرنې سره چې عددونه درې رقمي دي، نو درې خالي ځایونه لرو، چې په لاندې ډول د هغو ډکول په عددونو امکان لري:

د لومړي رقم ځای	د دویم رقم ځای	د دریم رقم ځای
$\boxed{4}$ دامکاناتو ډولونه	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$

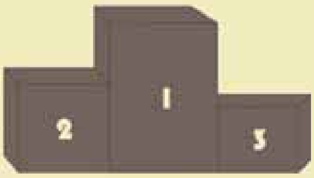
پوهېږو چې د لومړي رقم د ځای د ډکولو لپاره 4 امکانه شتون لري، په دې ډول د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره 3 امکانه پاتې کېږي، ځکه چې له څلور عددونو څخه یو د لومړي رقم لپاره نیول شوی دی، او بلې خواته څرنګه چې تکرار مجاز نه دی، نو یوازې 3 امکانه د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره شته او د دریم رقم د ځای د ډکولو لپاره دوه امکانه شته چې ټول حالتونه عبارت دي له: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ او د فورمول له مخې لروچې: $p_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

پوښتنې

1. څو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم يې 2 او وروستی رقم يې مساوي په 4 وي، په عدد کې هيڅ رقم تکراري نه وي؟
2. په څو ډوله 10 نفره کولای شي، د يوه گردی ميز په شاوخوا کښيني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره خوا په خوا کيني.
3. په څو ډوله کولای شئ 3 سره توپونه، 2 آسماني او څلور زيړ توپونه سره خوا په خوا په يو کتار کې کېږدو. (د هم رنگه تو پونو په کتار کې د هم رنگه توپونو ځاي بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.)

ترکیب یا کمبینیشن

Combination



د 1 او 2 عددونو ترکیب څه دی؟

د 1 او 2 عددونو ترتیب کوم دی؟

ستا سو له نظره ترکیبونه او ترتیبونه څه سره توپیرلري؟

مخکې له دې چې لاندې فعالیت سرته ورسوو، لاندې تعریف چې په فعالیت کې به له هغه څخه کار واخلو په پام کې نیسو.

تعریف

د $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ لیکدود چې n د k له پاسه ویل کېږي او په حقیقت کې د بینوم د ضریبونو په نامه یادیږي چې k د بینوم توان ښيي او په لاندې ډول دی:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n \ , \ k \wedge n \in IN$$

فعالیت

د پاسني تعریف په پام کې نیولو سره، د بینوم د $(a+b)^2$ د دوه حدي په انکشاف کې د بینوم ضرایب چې مساوي په $\begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ $k = 0,1,2,$ سره دی، پرتله کړئ:

$$(a+b)^2 = \square a^2 + \square ab + \square b^2$$

- د بینوم ضریبونه چې په پاسني انکشاف کې، په چوکاټونو کې نیول شوي، د $\begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ $k = 0,1,2$ له قیمتونو سره پرتله کړئ؟
- څرنګه چې $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$ سره دي، ویلای شئ چې د هر $n \in IN$ لپاره $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$ او د $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$ قیمتونه هم سره برابر او مساوي په 1 دي؟
- د $(a+b)^n$ په انکشاف کې د بینوم د ضریب د دویم حد قیمت د $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ له مخې حساب کړئ.
- د $\begin{pmatrix} 4 \\ k \end{pmatrix}$ $k = 0,1,2,3,4,$ قیمتونه د بینوم د انکشاف له کومو ضریبونو سره مساوي دی، ویې لیکئ؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د هر n او k طبیعي عددونو لپاره، په داسې حال کې چې $0 \le k \le n$ سره دی لرو:

(i) $\binom{n}{n}=1 \quad , \quad \binom{n}{0}=1$

(ii) $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$

(iii) له n څخه د r شیانو ترکیبونه عبارت د یو n عنصره سټ د غړو د ترکیب یا کمبینیشن د r له n شیانو څخه ده چې په C_r^n سره ښودل کیږي او قیمت یې عبارت دی له: $C_r^n=\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

لومړی مثال: په یوه ښوونځي کې د لسم 7 ټولګي شتون لري. د ښوونځي اداره غواړي چې لسم ټولګي له 7 تنو اول نمره ګانو، 4 تنه و ټاکي. په څو ډوله دغه انتخاب کیدلای شي؟

حل: لیدل کیږي چې له 7 تنو څخه د 4 تنو په ټاکنه کې هیڅ ډول برلاسي او ترتیب په پام کې نشته؛ یعنې دا چې، مهمه نه ده زده کوونکي د کوم ټولګي دي؛ نو دا ډول مسئله عبارت له ترکیب څخه ده چې له 7 تنو څخه 4 تنه و ټاکو؛ نو لرو چې: $C_4^7=\binom{7}{4}=\dfrac{7!}{4!(7-4)!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{3!\cdot4!}=\dfrac{5\cdot6\cdot7}{6}=35$

دویم مثال: که له 7 تنو زده کوونکو 4 تنه د لسم ټولګي د زده کوونکو د اتحادیې د مشرتابه لپاره، داسې چې لومړی تن رئیس، دویم معاون، دریم منشي او څلورم تن د مالي مسؤول په توګه و ټاکل شي، په دې صورت کې لرو چې:

څرنګه چې لیدل کیږي په دې ټاکنه کې ترتیب مهم دی، ځکه چې د ABCD د انتخاب ترتیب په داسې حال کې چې A رئیس، B معاون، C منشي او D مالي مسؤول دی، په داسې حال کې چې د CABD په ترکیب کې C رئیس، A معاون، B منشي او D مالي مسؤول ګڼل کیږي.

دا ډول مسئله عبارت له ترتیب یا پرموټېشن څخه ده چې له 7تنو څخه د 4 تنو په ترتیب انتخاب دي؛ یعنې لرو چې: $P(7,4)=\dfrac{7!}{(7-4)!}=\dfrac{7!}{3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=120\cdot7=840$

پوښتنې

1- له اوو حرفونو څخه لکه A,B,C,D,E,F او G څو 4 حرفي کلمې، پرته له تکراري حرفه جوړولای شو؟

2- د والیبال په یوه لیګ کې، 7 ټیمونه ګډون لري. په څو ډوله ټیمونه کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاس ته راوړي؟

3- له 4 نارینه وو او 6 مېرمنو څخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینه په کې یو رئیس او دویم یې مالي مسؤول وي.

ترکیب

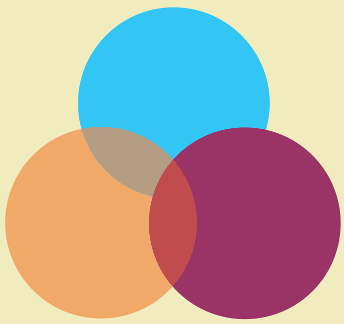
Combination

آیا پوهېږئ چې اصلي رنګونه کوم دي؟

د نارنجي او بنفش رنګ ترکیب کوم رنګ دی؟

ستاسو په نظر ژیړ رنګ د کومو رنګونو له ترکیبه جوړیږي؟

آسماني رنګ، بنفش رنګ، نارنجي رنګ.



فعالیت

د خپلو 5 تنو ټولګیوالو څخه 3 تنه په څو ډوله ټاکلی شئ؟

- موضوع په عملي توګه په ټولګي کې تجربه او حالتونه یې و شمېرئ؟
- که چیرې له 5 تنو زده‌کوونکو څخه 3 تنه داسي و ټاکل شي چې، لومړی کس سرګروپ، دویم د سرګروپ مرستیال او دریم تن منشي وي، د دريې تنو ګروپ، د ټاکلو ټول ډولونه څو دي؟
- د پورتني فعالیت لومړی او وروستی جزء یو تربله څه توپیر لري؟
- آیا فکر کولای شئ د پاسنیو ګروپونو د ټاکلو شمېر مساوي له کوم عدد سره دی؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: دلته د k په شمېر غړو یو ګروپ له یو سټ څخه چې n غړي لري، په عمومي ډول په دوه ډوله صورت نیسي چې په یوه کې ترتیب په پام کې دی، خو په بل کې ترتیب مهم نه شمېرل کېږي، یوازې د هغوی ترکیب د پام وړ دی.

په دې ترتیب د یو ترکیب یا کمبینیشن چې k شیان له n بېلابېلو شیانو څخه مطلب دی، چې په لاندې تعریف کې بیانېږي.

تعریف: د k شیانو ترکیب له یوه n عنصره سټ څخه چې په C_k^n ښودل کېږي او عبارت له $\binom{n}{k}$ ترکیبي امکاناتو څخه دی چې د k په شمېر غړي یې پرته له ترتیب څخه ټاکل کېږي، عبارت دي له:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

لومړی‌مثال: له 30 تنو څخه د 4 تنو ټاکل چې ترتیب په کې مهم نه دی، حساب کړئ؟

حل: پوهېږو چې مسئله عبارت له 30 تنو څخه د 4 تنو دی چې د فورمول له مخې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_4^{30}=\binom{30}{4}=\frac{30!}{4!(30-4)!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26!}{26!\cdot 4!}=27405$$

دویم مثال: له $A=\{1,2,3,4,5\}$ سټ څخه څو 3 عنصره فرعي سټونه په لاس راځي؟

حل: پوهېږو چې مسئله په حقیقت کې له 5 غړو څخه د 3 غړو ټاکل دي چې شمیر یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_3^{5}=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=10$$

پوښتنې

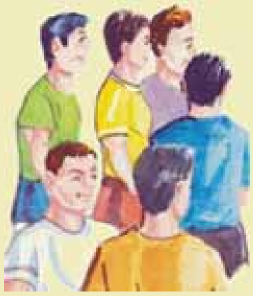
1- که چیرې په یوه آزموینه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب وي، په څو ډوله کولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنې د حل لپاره وټاکو؟

2- په یوه مستوي کې پنځه ټکي چې په یوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونیسئ د دې ټکو په نښلولو سره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.

3- که چیرې $P(n,2)-C_2^n=36$ سره وي، د n قیمت پیدا کړئ؟

تبدیل

Variation



په یوه المپیاکې له 10 ورزشي ټیمونو څخه په څو ډولونو د سرو زرو، سپينو زرو او برونزو مډالونه شتون لري؟

فعالیت

- د n بیلابیلو شیانو په پام کې نیولو سره د k په شمير شيان ټاکو،د هغوی مجموعي شمېر څو دی؟
- که چیرې د k شیانو په ټاکلو کې ترتیب داسې وي، چې په هغوی کې لومړی، دویم، دریم او ... شتون ولري، ټول مجموعي حالات به څو وي؟
- د پاسنیو دواړو ډولونو ترمنځ توپیر په کومه اندازه ده؟

پایله: د هغو ترکیبونو شمېر چې د k غړو د پرله پسې ترتیب په انتخاب کې له n غړو څخه په پام کې وي، نو په دې صورت کې یې شمېر مساوي په $k!\cdot C_k^n$ سره کېږي.

دغه ترکیب د وریشن Variation یا تبدیل په نامه یاد او په V_k^n سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$V_k^n = k!\cdot C_k^n = k!\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \Rightarrow \quad V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: څو امکانه وجود لري چې په یوه انتخاباتي غونډه کې له 30 تنو ګډون کوونکو څخه 4 تنه د مشرتابه لپاره په داسې حال کې چې یو تن رئیس، یو لومړی مرستیال، یو دویم مرستیال او څلورم تن د منشي په توګه دنده ترسره کړي؟

حل:مسئله په حقیقت کې د 4 تنو تبدیل له 30 تنو څخه ده، چې د تعریف له مخې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30\cdot 27\cdot 29\cdot 28\cdot 26!}{26!} = 657520$$

پورتني حالات چې تر اوسه مو د ترتیبونو، ترکیبونو او تبدیلونو لپاره تر بحث لاندې و نیول په لاندې جدول کې را ټول شوي دي.

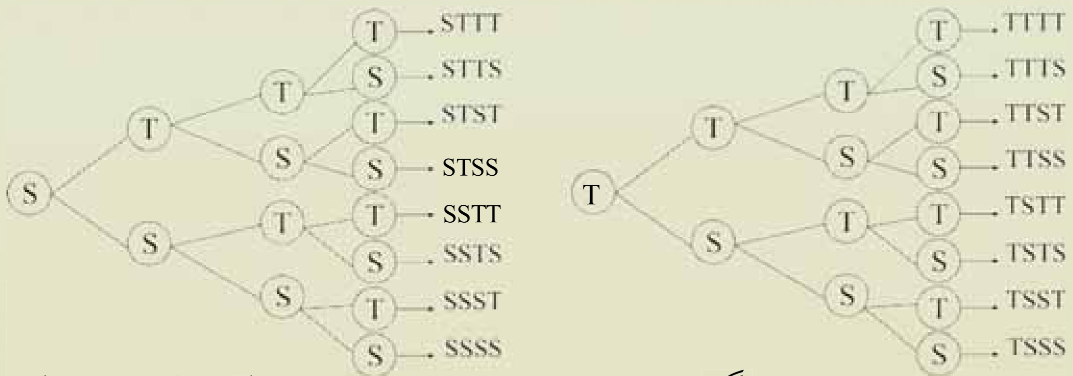
د ټاکنو ډول k غړي له n غړو څخه	د امکاناتو شمیر	
	پرته له تکراره $k \le n$	له تکرار سره $k \le n$
ترتیب یا پرموټېشن	$P(n,k) = n! \quad , \quad n = k$	$P(n,k) = \frac{n!}{k!}$
ترکیب یا کمبېنیشن	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$
تبدیل یا وریشن	$V_k^n = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^n = n^k$

پوښتنې

1- په یوه ورزشي سیالۍ کې د فوټبال 12 ټیمونه، په څو ډوله لومړی، دویم او دریم مقام ګټلی شي؟

2- د یوولسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله 2 تنه د ټولګي د استازي او د استازي د مشر مرستیال په توګه ټاکلی شو؟

مثال: د یوې سکې په اچولو سره چې د راتګ امکان یې، شیر یا خط ممکن دی او د هرې خوا د راتګ احتمال یې مساوي په $\frac{1}{2}$ دی، په پام کې ونیسئ، که چیرې سکه 2 ځلې، درې ځلې، شپږ ځلې، اته ځلې او یا 16 ځلې وغورځوو، پوهېږو چې د هم چانسو لومړنیو پېښو په نمونه‌یي فضا کې په یوه ونه‌ییز ګراف کې لاندې حالت لرو: (شیر $= S$ او خط $= T$) دی.

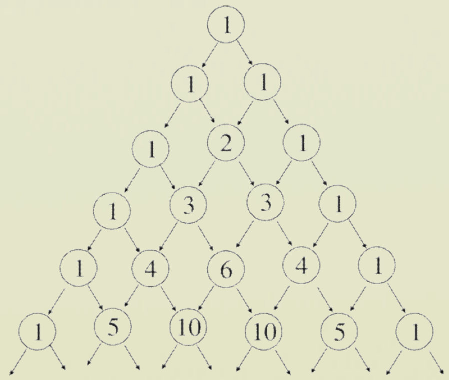


د پاسني مثال د شیر او خط د راتګ احتمال په یو، دوه، درې او څلور ځلې اچولو کې په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

د سکې غورځول	هیڅ ځل		یو ځل		دوه ځله		دري ځله		څلور ځله	
	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال
د خط د راتګ شمیر	0	1	0	$1/2$	0	$1/4$	0	$1/8$	0	$1/16$
			1	$1/2$	1	$2/4$	1	$3/8$	1	$4/16$
					2	$1/4$	2	$3/8$	2	$6/16$
							3	$1/8$	3	$4/16$
									4	$1/16$

که چیرې جدول ته په ځیر سره پاملرنه وکړئ، د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم وینو چې د بنیوم په انکشاف کې په ترتیب سره د حدونو ثابت غړي دي چې د لومړي ځل لپاره د پاسکال له خوا راوپېژندل شول او تر اوسه د هغه په نامه یادېږي.

دغه نظم مثلاً په مخامخ مثلث کې په یوه لیکه کې اعداد د کیڼې او ښي خوا د عددونو سره په پورته لیکه کې له جمعې لاس ته راغلي دي.



په دې ډول کولای شو چې مثلث ته تر بینهایت پورې دوام ورکړو، چې که چیرې هغوی د یو دوه جمله‌يي له انکشاف سره پرتله کړو، لکه د راکړل شوي پاسکال مثلث عددونه دي؛ مثلاً پاملرنه وکړئ چې د دوه

جمله‌یې په انکشاف کې له هغو عددونو څخه مو حلقه تاو کړې ده د مثلث له اعدادو سره چې حلقه ترې تاوشوې ده یو شان ده:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^3$$

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

چې دغه ضریبونه د $(a+b)^n$ په انکشاف کې n د k له پاسه د ضریبونو استعمال په لاندې ډول لیکلی‌شو:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د " $\sum$ " علامه د پاسنی مجموع لپاره استعمال شوې ده.

په دې ډول د خط راتللو احتمال په k− امه مرتبه کې عبارت دی له: $\text{P}(\text{خط راتګ}) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$

پوښتنې

1. **د فوټبال په یوه سیالی کې 12 ټیمونه ګډون لري، په څو ډوله کولای شو ګټونکي لومړی، دویم او دریم مقام ته وټاکو.**
2. **د یوولسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولګي د استازې او د استازې د مرستیال په توګه وټاکو.**

د بینوم قضیه

د پاسکال د مثلث له مخې د بینوم د انکشاف ضریبونه وټاکئ.

$$(a+b)^2 = \bigcirc a^2 + \bigcirc ab + \bigcirc b^2$$
$$(a+b)^3 = \bigcirc a^3 + \bigcirc a^2b + \bigcirc ab^2 + \bigcirc b^3$$
$$(a+b)^4 = \bigcirc a^4 + \bigcirc a^3b + \bigcirc a^2b^2 + \bigcirc ab^3 + \bigcirc b^4$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

فعالیت

- په یوه ناځاپي تجربه کې چې یوازې دوه ناځاپي پېښې د A او $\overline{A}$ پیښېږي، یعنې د $\{A, \overline{A}\}$ نمونوي فضا لري. د A د پیښې احتمال عبارت دی له:
- که چیرې $P(A) = P$ د A د پیښې احتمال وي، د هغې د مکمله پېښې احتمال یعنې $\overline{A}$ څو دی
  $P(\overline{A}) = ?$
- د پورتنۍ تجربې له بیا بیا تکرار څخه که چیرې د A حادثې پیښېدو ته 1 او د نه پېښېدو حالت ته یې 0 ووایو لاندې جدول د تجربې د بیا بیا تکرار یعنې $n = 2$ لپاره بشپړ کړئ.

د بینوم د ضریبونو ارایه	احتمال	ممکنې پایلې	k
$\binom{2}{0} . p^0 . (1-p)^2$	$(1-p)^2$		0
	$2p(1-p)$	10	1
$\binom{2}{2} p^2 (1-p)^2$		11	2
$\sum \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = ?$	$(p+(1-p))^2$		

د بینوم د حدونو د انکشاف مجموع یعنې $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ پیدا کړئ؟

له پورتنې فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه ناځایي تجربه کې چې د نمونې فضا غړي یې په مساوي احتمال په تجربه کې بیابیا د تکرار وړ وي، نو د تجربې په n ځله تکرار کې د بینوم د انکشاف k – ام حد کې لاندې احتمال لري:

$$\binom{n}{k}.p^k(1-p)^{n-k}$$

پورتنی بینوم په $B(n,p,k)$ ښودل کېږي، د برنولي د پرابلم د احتمال په نامه یادېږي او لیکو:

$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ سره کېږي.

مثال: له n تنو څخه د 10 تنو په شمېر په ناځاپي ډول ټاکو، د k تنو انتخاب شوو خلکو له جملې څخه 2 تنه ټاکو، پیدا کړئ د دې احتمال چې دواړه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي. $P(k\le n)=?$

حل: په دې ډول د Ω په نمونه‌یي فضاکې داسې فرضوو چې د هرې ورځې احتمال $\frac{1}{365}$ او د زېږېدنې ورځ د سوال وړ ده نه، د زېږېدنې کال.

په دې ډول Ω په نمونه‌یي فضاکې ټول امکانات له 365 ورځونه څخه د k شمېر لپاره عبارت دی له:

$|\Omega|=(365)^k$

په دې ډول اوس که چیرې د A ناځاپي پېښه چې لږترلږه دوه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي، په ساده ډول داسې د محاسبې وړ ده، چې د A د حادثې مکمله په پام کې نیسو، په دې ډول $\overline{A}$ عبارت له هغې ناځاپي پېښې څخه ده چې k تنه په بېلابېلو ورځو کې زېږېدلي دي. په دې ډول $\overline{A}$ عبارت د k پرموټېشن له 365 څخه ده چې لرو:

$$P(\overline{A})=(365,k)=\frac{365!}{(365-k)!}$$

په دې ډول:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{|\overline{A}|}{|\Omega|}=1-(365,k)=1-\frac{365!}{(365-k)!}\cdot\frac{1}{(365)^k}$$

پوښتنې

وښیئ چې:

$$(I)\qquad \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

$$(II)\qquad \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

دوه جمله يي احتمال

آيا کولای شو چې د هرې نمونه‌يي فضا پايلې په دوه ناخاپي پيښو چې له يو بل سره هيڅ ګډ عنصر نه‌لري، ترتيب کړو.

موضوع د سټ د تيوري له مخې په يوه اختياري نمونه‌يي فضا کې، دوه ناخاپي پيښو ته چې اتحاد يې نمونه‌يي فضا وي په مثال کې يې تشريح کړئ.

فعاليت

- د هغو تجربو څخه چې تر اوسه يې پيژنئ يا دونه وکړئ او يوه نمونه‌يي فضا د دوه اتفاقي يا ناخاپي پېښو په ارايه چې ټوله نمونه‌يي فضا يې يوازې دوه غړي ولري.
- آيا هغه ناخاپي تجربې چې نمونه‌يي فضاګانې يې له 2 څخه زيات غړي لري. کولای شو په داسې نمونه‌يي فضاګانو واړوو چې يوازې 2 غړي ولري؟ مثال راوړئ.
- په عمومي ډول څه ډول کولای شو چې يوه نمونه‌يي فضا چې ډير غړي لري، په يوه داسې نمونه‌يي فضا چې 2 غړي لري، واړوو؟
- که چيرې د دا ډول فضاګانو د يو غړي د پيښې احتمال p وي، د بلې پيښې د احتمال قيمت به څو وي؟
- که چيرې تجربه n ځلې سرته ورسوو، او د k په شمير له n ځلې ($0 \le k \le n$) ورل او نور يې بايلودل وي، د k ځلي بريالیتوب (P) په n ځلي تکرار کې پيدا کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: د هرې ناخاپي تجربې نمونه‌يي فضا کولای شو چې په داسې يوې نمونه‌وي فضا واړوو چې دوه غړي ولري.

– که چيرې د دا ډول نمونه‌وي فضا د يو غړي احتمال (P) وي، نو هرو مرو د بل حالت احتمال $1-p$ او بايلل دي.

– که چيرې دا ډول تجربې n ځلي تکرار شي، نو د k – ام ځلي ورل په n ځلي تکرار کې او د بايللو احتمال به $q = 1-p$ سره دي، يعنې لرو چې:

$$0 \le k \le n \quad , \quad \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \text{k، – ام ځلي ورل په n ځلي تکرار کې}$$

لومړی مثال: پاملرنه وکړئ چې که چیرې په یوه تجربه کې د وړلو احتمال $\frac{1}{2}$، د بايللو احتمال هم مساوي په $\frac{1}{2}$ سره وي، په دې ډول ناڅاپي پیښو کې پورتنی اړیکه په لاندې ډول حسابېږي:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^k.(1-\frac{1}{2})^{n-k}=\binom{n}{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

پورتنی پایله د یوې تجربې په n ځله تکرار کې چې له هغې جملې څخه k ځلې یې وړل وي، یوې دوه عنصره نمونه‌يي فضا ته وځیږئ؟

دویم مثال: په یو 5 اولاده فامیل کې، د دې احتمال چې له اولادونو څخه 2 تنه هلکان او پاتې نجونې وي، څو دی؟

حل: که چیرې د اولادونو د هلك او نجلی زیږد برابر په پام کې ونیسو لرو چې:

څرنګه چې په دې مثال کې $p=\frac{1}{2}$ او $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ سره دی، نو لیکلای شو:

د دې احتمال چې دوه هلکان او درې نجونې وي. $=\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16}=0.3125=31.25\%$

دریم مثال: د رمل یوه دانه 6 ځلې غورځوو، د دې احتمال پیدا کړئ چې په 4 ځلې غورځیدو کې راغلي خالونه له دریو څخه لږ وي؟

حل: که چیرې له 3 څخه لږ راتلل حالت وړل په پام کې ونیسو؛ نو:

$$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$

$$q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0.6666=66.66\%$$

(د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې له 6 ځلې څخه، خالونه له 3 څخه لږ وي) $=\binom{6}{4}.\left(\frac{1}{3}\right)^4.\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}=0.0823=8.23\%$

څلورم مثال: یوه فلزي سکه داسې جوړه شوې ده چې د خط راتلو احتمال يې مساوي په $\frac{1}{3}$ وي، که چیرې دغه سکه 4 ځلې وغورځول شي، د دې احتمال چې لږ تر لږه 3 ځلې شېر راشي، مطلوب دی.

حل: که چیرې د سکې د خط راتللو حالت ته ورل او احتمال يې p په پام کې ونیسو، نو د خط د نه راتللو یا شېر راتګ مساوي په $1-p$ سره دی؛ یعنې: $1-p=\frac{1}{3}p$

له دې څخه $p=\frac{3}{4}$ او $q=\frac{1}{4}$ په لاس راځي:

$$\frac{13}{256}=\frac{3}{64}+\frac{1}{256}=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{\text{4 ځلې شېر}}\cdot\binom{4}{4}+\underbrace{\binom{4}{4}}_{\text{1 ځل خط}}\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^3}_{\text{3ځلې شېر}}\cdot\binom{4}{3}=\left\langle\begin{array}{c}\text{د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدوکې}\\ \text{لږ تر لږه 3 ځله شېر راشي.}\end{array}\right\rangle$$

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه د خط راتلو احتمال يې له 0.99 څخه ډېر وي؟

حل: داسې فرضوو چې سکه n ځلې غورځوو د دې احتمال چې لږتر لږه یو ځل سکه خط راشي مساوي ده په:

(د هر n ځلې شیر راتګ احتمال) $-1=$ دی، لږ تر لږه یو ځل خط راتلو احتمال

$$=1-\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

په دې ډول ددې شرط $1-\frac{1}{2^n}>0.99$ یا $\frac{1}{2^n}<0.01$ سره دی چې $2^n>100$ یا $n\geq 7$ سره کېږي.

په دې ډول باید سکه 7 ځلې وغورځوو چې لږتر لږه یو ځل خط راشي، احتمال به يې له 0.99 څخه لوی وي.

پوښتنې

یوه سکه څو ځله غورځوو، د دې احتمال پیداکړې چې:

(i): په 4 ځله غورځیدو کې، 2 ځلې خط راشي.

(ii): په 6 ځله غورځیدلي، 3 ځلې خط راشي

(iii): په 8 ځله غور ځیدو کې، 4 ځلې خط راشي.

(iv): فکر وکړئ چې که سکه $2n$ ځلې وغورځول شي او n ځلې خط راشي، د n په ډېریدو، د p بدلون په څه ډول دی؟

د خپرکي مهم ټکي

فکتوریل: د هر طبیعي n عدد لپاره د $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ د ضرب حاصل په لنډ ډول په $n!$(n فکتوریل) ښودل کېږي، د تعریف له مخې $0!=1$ سره دی.

پرموټېشن یا ترتیب: د n غړو ترتیب په p_n ښودل کېږي که چیرې:

- په ترتیب کې تکرار مجاز او ممکن نه وي: $P_n = n!$

خو که چیرې تکرار مجاز وي، د ترتیبونو شمېر مساوي په P_k^n سره ده او داسې معنا ورکوي چې k ځلې په n ځلې ترتیبونو کې تکرار وجود لري. چې د پورتني حالت په پام کې نیولو سره ټول حالتونه مساوي دي په:

$$P_k^n = \frac{n!}{k!} \quad , \quad k \le n$$

د $\binom{n}{k}$ **له پاسه**: د $n,\binom{n}{k}$ د k له پاسه، د بینوم هغه ضریبونه دي چې k د بینوم د توان په ټاکلو سره، د ضریبونو لپاره داسې صورت نیسي:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ ، \ n,k \in IN \ ، \ 0 \le k \le n$$

- له n شیانو څخه د r شیانو ترکیبونه په:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad ، \quad r \le n$$

وریشن یا تبدیلونه: په ترتیبونو کې چې پر له پسې ترتیب د k انتخابي غړو له n غړو څخه مطلوب وي، په نامه دی، n په k بدیلونو یاد او لیکو:

$$V_k^n = k!\cdot C_k^n = k!\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

دبینوم قضیه: د $(a+b)^n$ دو جمله‌یي انکشاف عبارت دی له:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

د یوې تجربې په n ځلې تکرار کې، چې هر حالت یې p او د $q=1-p$ احتمال لري.

د $k-$ام ځلې ورلو یعنې p له n ځلې څخه او نور پاتې حالتونه چې بایلول ګڼل کېږي؛ یعنې $q=1-p$ سره دي او صورت نیسي:

$$\left\langle \begin{array}{c}\text{د k ځلې ورلو د احتمال قیمت د تجربې} \\ \text{د n ځلې په پای کې}\end{array} \right\rangle = \binom{n}{k}\cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \ ، \ 0 \le k \le n$$

د څېړکي پوښتنې

1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونیسئ:

$$S = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

i): په څو ډوله کولای شو له پاسنیو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

ii): ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په یوه کتار کې څنګ په څنګ درېدلي شي؟

3- په څو ډوله ابوبکر، زبیر، یاسر، هنزله او خبیب کولای شي، په یو کتار کې خوا په خوا د یو یادګاري تصویر د اخېستلو لپاره ودرېږي؟

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په درې 3 ګروپونو ووېشو؟

5- د پاسکال د مثلث له مخې د $(a+b)^7$ انکشاف په لاس راوړئ؟